

# 한국 수학올림피아드 1차 문제 및 풀이

2003년 - 2006년

2007년 4월 17일

KAIST 수학문제연구회



# 차례

|                                 |    |
|---------------------------------|----|
| 2003년 한국 수학올림피아드 1차시험 . . . . . | 4  |
| 2004년 한국 수학올림피아드 1차시험 . . . . . | 9  |
| 2005년 한국 수학올림피아드 1차시험 . . . . . | 15 |
| 2006년 한국 수학올림피아드 1차시험 . . . . . | 19 |

## I 풀이편 25

|                               |    |
|-------------------------------|----|
| 2003년 한국 수학올림피아드 풀이 . . . . . | 27 |
| 2004년 한국 수학올림피아드 풀이 . . . . . | 45 |
| 2005년 한국 수학올림피아드 풀이 . . . . . | 67 |
| 2006년 한국 수학올림피아드 풀이 . . . . . | 89 |

## 귀띔

KMO는 1987년에 처음 시작되었고, 매해  $x$ 시간에  $x$ 문제씩 풀도록 출제된다. 본래 고등부만의 서술식 1차시험과 2차시험으로 되어 있다가 1997년부터 1차시험에 중등부가 추가되었고, 2003년부터는 예선 성격의 객관식/단답식 시험이 추가되어 3차시험까지로 개편되었다.

## 2003년 한국 수학올림피아드 1차시험

### 중등부

1.  $a$ 와  $b$ 는 모두 1 이상 100 이하의 정수이다. 이 때, 두 수의 합  $a+b$ 를 3으로 나누면 나머지가 2이고, 두 수의 곱  $ab$ 를 3으로 나누면 나머지가 1인 정수의 순서쌍  $(a, b)$ 는 모두 몇 개인가?
2.  $2^{1000}$ 을 100으로 나눈 나머지는 얼마인가?
3. 양의 정수  $m, n$ 에 대하여  $m^2 + 2n^2$ 을 8로 나누었을 때 나타날 수 있는 나머지를 모두 구하여라.
4. 정11각형의 꼭지점에 시계방향으로 1, 2, 3, ..., 11로 번호가 붙여져 있고 토끼는 이 도형 위를 다음의 규칙에 따라 이동한다고 하자.

꼭지점  $k$ 에서는 시계방향으로 다음  $k^2$ 번째 꼭지점으로 이동한다. (예를 들어 꼭지점 3에서는 꼭지점 1로, 또, 꼭지점 4에서는 꼭지점 9로 이동한다.)

이 규칙을 2003회 적용하여 꼭지점 2에 토끼가 도착하게 되는 출발점은 모두 몇 개인가?

5.  $x, a, b, c, d$ 는 유리수이다.

$$\frac{1}{x + \sqrt{2} + x\sqrt{3} + \sqrt{6}} = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$$

일 때  $a$ 의 값은?

6. 함수  $f(x)$ 는 임의의 실수  $x$ 에 대하여

$$f(1+x) + xf(1-x) = x^2 + x$$

를 만족시킨다.  $f(-6)$ 의 값을 구하여라.

7. 직선  $y = x$ 와 포물선  $y = x^2$ 으로 둘러싸인 영역 안에 정사각형이 있다. 이 정사각형의 한 변은  $y = x$  위에 있고, 두 꼭지점은  $y = x^2$  위에 있다. 이 정사각형의 넓이는 얼마인가?
8.  $a, d \neq 0$ 인 네 자리 자연수  $abcd$ 가 있다. 이것의 각 자리수의 순서를 바꾸어 얻은 네 자리 자연수  $dcba$ 를 생각하자.

$$\sqrt{abcd - dcba}$$

의 값이 자연수가 될 때, 이 식의 최대값은 얼마인가?

9. 대한중학교의 학생수는 500명이고 동아리의 수는 20개이다. 이제 학생들에게 1부터 500까지의 고유번호를 부여하고 20개의 동아리를  $C_1, C_2, \dots, C_{20}$  으로 나타낼 때, 동아리  $C_i$ 에 속한 학생수는  $(i+10)$ 이라고 한다. 고유번호가  $j$ 인 학생이 속한 동아리의 수를  $d_j$ 라고 할 때, 다음 값은 얼마인가? (단, 한 학생이 여러 개의 동아리에 동시에 가입할 수도 있고, 또는 아무 동아리에도 가입하지 않을 수도 있다.)

$$d_1 + d_2 + \dots + d_{500}$$

10. 다섯 쌍의 부부가 모임에 참가하였다. 사회자가 그 중 다섯 명을 뽑아 선물을 준다. 이 때, 선물을 하나도 받지 못한 부부가 오직 한 쌍일 경우의 수는 몇 개인가?
11. 가로, 세로가 각각  $420\text{ cm}$ ,  $370\text{ cm}$  인 직사각형 모양의 벽  $ABCD$ 에 한 변의 길이가  $10\text{ cm}$ 인 정사각형 모양의 타일을 꼭 차게 붙였다. 이 때, 대각선  $AC$ 가 지나가는 타일의 수는 몇 개인가?
12. 7을 두 개 이상의 자연수의 합으로 표현하는 방법의 수는 몇 개인가? (단, 더하는 순서가 다르면 다른 표현으로 본다. 예를 들어,  $2+2+3$ ,  $2+3+2$ ,  $3+2+2$  는 모두 다른 것으로 본다.)
13. 반지름의 길이가  $3\text{ cm}$ 인 공을 내부에 포함하는 볼록한 다면체의 부피는  $V\text{ cm}^3$ 이고 겉넓이는  $A\text{ cm}^2$ 이다. 다음 중 일어날 수 없는 경우는? (단, 공이 다면체의 면에 접하는 경우도 공이 다면체에 포함되는 것으로 본다.)

$$(1) V < A \quad (2) V = A \quad (3) A < V < 2A \quad (4) V = 3A \quad (5) 3A < V$$

14. 직육면체  $ABCD-EFGH$ 의 내부의 한 점  $P$ 에 대하여  $PC = 4$ ,  $PF = 5$ ,  $PG = 6$ ,  $PH = 7$  이라 할 때, 선분  $PA$ 의 길이는?

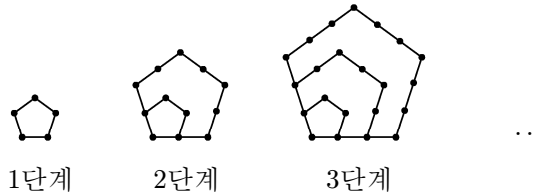
[그림]

15. 정팔각형  $ABCDEFGH$ 의 대각선  $AD$ ,  $DG$  위에 점  $M$ ,  $N$ 을 각각 잡을 때  $AM : MD = DN : NG = a : (1-a)$  라고 하자. 점  $M$ ,  $N$ 과 꼭지점  $C$ 가 일직선 위에 있을 때  $a^2$ 의 값은 얼마인가? (단,  $0 < a < 1$ )
16. 정수  $a, b, c$ 가

$$a + 2b + 3c = 35, \quad ab + bc + ca = 61$$

을 만족시킬 때,  $a$ 의 최대값을 구하여라.

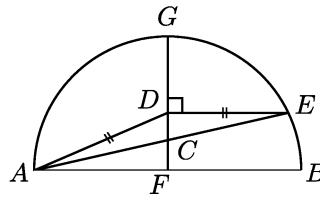
17. 오각형의 각 변에 아래 그림과 같이 점을 찍어 나간다. 19단계에서 점은 모두 몇 개인가?



18. 중학생 진희는 집에서 최단 경로를 따라 약속 장소인 극장으로 가다가, 약속 장소가 서점으로 바뀌었다는 연락을 어떤 사거리에서 받고, 곧바로 최단 경로를 따라 서점으로 갔다. 진희가 집에서 서점에 가기까지 택하였을 수 있는 모든 경로의 수는 몇 개인가?

[집(0.5,1), 서점(5.5,1), 극장(5.5,5)의 좌표에 있는 그림]

19. 선분  $AB$ 를 지름으로 갖는 원  $O$ 가 주어져 있다. 지름  $AB$  위의 한 점  $F$ 에서 수선을 그어 원  $O$ 와 만나는 한 점을  $G$ 라 하자. 선분  $FG$  위의 한 점  $C$ 를 잡아 직선  $AC$ 와 원호  $GB$ 의 교점을  $E$ 라고 하고, 점  $E$ 에서 선분  $FG$ 에 내린 수선의 발을  $D$ 라고 하자. 이때,  $\angle ACD = 2\angle ADC$  이고  $AD = DE$  라면,  $\angle CAD$ 의 크기는 얼마인가?



20. 내각이 모두  $120^\circ$ 보다 작은 삼각형  $ABC$ 의 내부의 점  $P$ 가

$$AP \cdot BC = BP \cdot CA = CP \cdot AB$$

를 만족한다고 하자.  $\angle BAC = 50^\circ$  일 때,  $\angle BPC$ 의 크기는 얼마인가?

## 고등부

- (중등부 4번과 동일)
- 합하는 순서를 무시하고 20을 2의 지수 형태의 자연수의 합으로 표시하는 가지수는 얼마인가? (예를 들어,  $2^2 = 2^1 + 2^1 = 2^1 + 2^0 + 2^0 = 2^0 + 2^0 + 2^0 + 2^0$  이므로 4를 위의 형태의 합으로 표시하는 가지수는 4가 된다.)
- 함수  $f : [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  가 다음 조건을 만족시킬 때,  $f(\frac{229}{4})$ 의 값은 얼마인가?

(a)  $f(2) = 2$  이고,

(b) 임의의 양수  $x, y$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\{f(x+y+1)\}^2 = \{f(x+1)\}^2 + \{f(y+1)\}^2$$

4. 조건  $x^4 - 2y^2 = 1$  을 만족시키는 정수의 순서쌍  $(x, y)$ 의 개수는 모두 몇 개인가?

5. 실수  $x, y, z$ 가 조건

$$4(x+y+z) = x^2 + y^2 + z^2$$

을 만족시킨다. 식  $xy + yz + zx$  의 최대값을  $a$ , 최소값을  $b$ 라 할 때,  $10a + b$  의 값은 얼마인가?

6.  $x$ 의 5차 다항식

$$Q(x) = a - x(x-1)(x-a) \frac{x^2 - ax + a^2}{a^3} \quad (0 < a < 1)$$

에 대하여 폐구간  $[0, a]$ 에 있는  $Q(x) = x$  의 근의 개수는 몇 개인가? 만약 중근이 있으면 한 개로 간주한다.

7. 음이 아닌 정수  $n$ 에 대하여

$$f(0) = 0, \quad f(n) = f\left(\left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil\right) + n - 2 \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

을 만족시키는 함수  $f(n)$ 이 있다.  $0 \leq n \leq 2003$  일 때,  $f(n)$ 의 최대값은 얼마인가? (실수  $x$ 에 대하여  $\lceil x \rceil$ 는  $x$ 를 넘지 않는 가장 큰 정수이다.)

8. 조건  $(a-2)^2 + b^2 \leq 4$  와  $(x+1)^2 + y^2 \leq 1$  를 각각 만족시키는 실수의 순서쌍  $(a, b)$ ,  $(x, y)$ 에 대하여  $ax + by$  의 최대값을  $M$ , 최소값을  $m$ 이라 할 때  $m^2 + M^2$  의 값은 얼마인가?

9. 친구 3명을 매일 한 명씩 6일 동안 초대하는데 어떤 친구도 3번 넘게 초대하지 않을 경우의 수는 얼마인가? (단, 한 번도 초대하지 않은 친구가 있을 수도 있다.)

10. 내각의 크기가 모두 같으면서 변의 길이가 각각 4, 5, 6, 7, 12, 13인 육각형에 대하여, 이 육각형을 한 변의 길이가 1인 정삼각형으로 채울 경우 모두 몇 개의 정삼각형이 필요한가?

11.  $f \circ f \circ f$  가 항등함수인 함수  $f: \{1, 2, \dots, 10\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 10\}$  의 개수는 몇 개인가?

12. 어느 탁구대회에 6개의 팀이 참가하여 리그전을 벌일 예정이다. (리그전에서는 각 팀이 다른 모든 팀과 정확하게 한 번씩 시합을 한다.) 각 팀이 하루에 한 번, 한 경기장에서 동시에 경기를 하게 하여 5일을 소요할 예정일 때, 가능한 경기일정표는 모두 몇 개인가? (단, 경기일정표에는 코트를 표시하지 않는다.)

13. (중등부 15번과 동일)

14. 주어진 원  $O$ 의 반원 위에 순서대로 놓인 서로 다른 점  $S, A_1, A_2, A_3, A_4$ 와 이 원과 만나지 않는 직선  $l$ 이 있다. 각각의 직선  $SA_1, SA_2, SA_3, SA_4$ 와  $l$ 이 만나는 점  $B_1, B_2, B_3, B_4$ 를 잡았더니  $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$  이 되었다.

[그림]

다음 식의 분모가 0이 아닐 때, 이 식의 값은 얼마인가?

$$\frac{SA_1 \cdot SB_1 - SA_4 \cdot SB_4}{SA_2 \cdot SB_2 - SA_3 \cdot SB_3}$$

15.  $AB : BC = 1 : \sqrt{3}$  인 직사각형  $ABCD$ 의 내부에 점  $P$ 가 있다.  $AP = 2, BP = \sqrt{2}, CP = 2$  일 때 직사각형  $ABCD$ 의 넓이는?

16. 조건  $n^2 = m^4 + 2m^3 + 2m^2 + 2m + 2$  를 만족시키는 정수의 순서쌍  $(m, n)$ 의 집합을  $A = \{(m_i, n_i) \mid i = 1, 2, \dots, k\}$  라 할 때  $\sum_{i=1}^k (m_i^2 + n_i^2)$  의 값은 얼마인가?

17. 양수  $a, b, c$ 에 대하여 식

$$\frac{a}{7a+b} + \frac{b}{7b+c} + \frac{c}{7c+a}$$

이 취할 수 있는 값의 범위를 구하여라.

18. (중등부 18번과 동일)

19. (중등부 19번과 동일)

20. 정삼각형  $ABC$ 의 변  $AB, BC, CA$  위에 각각 점  $D, E, F$ 를

$$DB = \frac{1}{4}AB, \quad BE = \frac{1}{2}BC, \quad CF = \frac{3}{4}CA$$

되도록 잡는다. 세 점  $A, D, F$ 를 지나는 원과 세 점  $B, D, E$ 를 지나는 원의 교점을  $G$ 라고 할 때, 점  $G$ 는  $\triangle ABC$ 의 내부에 존재한다.  $\triangle ABC$ 의 넓이가 3200일 때, 세 개의 사각형  $ADGF, DBEG, ECFG$  중에서 넓이가 가장 작은 것의 넓이를 구하여라.



## 2004년 한국 수학올림피아드 1차시험

### 중등부

1. 자연수  $a, k$ 에 대하여  $\{a_k\}$ 는 다음 성질을 만족시키는 정수라 정의하자.

$$\frac{a}{10^k} - \frac{1}{2} < \{a\}_k \leq \frac{a}{10^k} + \frac{1}{2}$$

$\langle a \rangle_k = 10^k \cdot \{a\}_k$  라 할 때,  $\langle \langle a \rangle_1 \rangle_2 = 2000$  을 만족시키는 자연수  $a$ 의 개수는 얼마인가?

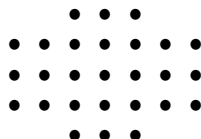
2. 10000을 연속되는 두 개 이상의 자연수의 합으로 나타낼 수 있는 경우의 수는 얼마인가? (단, 더하는 순서는 무시한다.)
3. 실수  $a, b, c$ 가 임의의 실수  $x, y, z$ 에 대하여 다음 부등식을 만족시킬 때,  $3a + 2b - c$ 의 최대값은 얼마인가?

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + axz + byz + cz^2 \geq 0$$

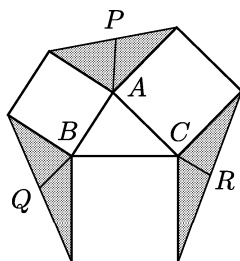
4.  $a + b = 1$  을 만족시키는 양수  $a, b$ 에 대하여  $\frac{1}{1+a} + \frac{a}{1+b}$  의 최소값은 얼마인가?
5. 일렬로 배열된 20개의 의자에 8개의 구별되지 않는 공을 얹어 놓으려고 한다. 이웃하는 공 사이에 홀수 개의 빈 의자가 있도록 얹어 놓는 방법의 수를 구하여라.
6. 동전을 20번 던졌을 때, 뒷면이 6번 나오고 앞면이 연속해서 5번 이상 나오지 않는 경우의 수는 얼마인가?
7.  $\angle A = 72^\circ$  인 삼각형  $ABC$ 의 내부의 점  $M$ 에 대하여  $\angle BMC = 148^\circ$  이다. 점  $M$ 에서 세 변  $BC, CA, AB$ 에 내린 수선의 발을 각각  $D, E, F$ 라 할 때,  $\angle FDE$ 의 크기는 얼마인가?
8. 어떤 볼록다면체의 각 면이 삼각형, 사각형, 오각형, 또는 육각형이라 하자. 이 다면체에 삼각형 면이 두 개, 사각형 면이 한 개 있을 때, 다음 중 옳은 것은 어느 것인가?
- (1) 오각형 면은 세 개, 육각형 면은 두 개 있을 수 있다.
  - (2) 오각형 면은 두 개, 육각형 면은 세 개 있을 수 있다.
  - (3) 오각형 면은 네 개, 육각형 면은 한 개 있을 수 있다.
  - (4) 오각형 면은 두 개, 육각형 면은 두 개 있을 수 있다.

(5) 오각형 면은 한 개, 육각형 면은 네 개 있을 수 있다.

9. 다음 그림과 같이 가로와 세로의 간격이 1이 되도록 점들이 배열되어 있을 때, 이 중의 세 점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 개수는 얼마인가?



10. 다음 그림과 같이 세 변의 길이가 각각 5, 6, 7인 삼각형  $ABC$ 의 외부에 세 개의 정사각형을 그리면 세 개의 빗금친 삼각형을 얻는다. 그림에서 세 선분  $AP$ ,  $BQ$ ,  $CR$ 은 각각 빗금친 삼각형의 중선이다. 이 세 중선의 길이의 합은 얼마인가?



11.  $1 \leq n \leq 100$  인 자연수  $n$ 에 대하여  $(n-1)!$ 이  $n$ 으로 나누어 떨어지는 자연수  $n$ 의 개수를 구하여라. (단,  $0! = 1$ ,  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$  이다.)
12. 1보다 큰 정수  $a, b$ 가  $a^{9a} = b^{2b}$  를 만족시킬 때,  $2a + b$  의 최소값을 구하여라.
13. 다음 방정식을 만족시키는 자연수  $m, n$ 이 무수히 많을 때, 정수  $a$ 의 값을 구하여라.

$$\frac{m^2 - n^2 - 6n - 14}{m + n + 2} = a$$

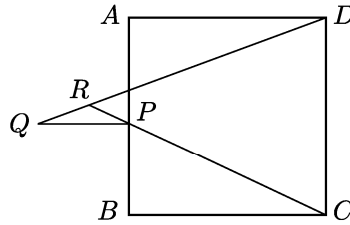
14. 다음 수에 가장 가까운 정수를 구하여라.

$$\sqrt{13} + \sqrt{15} + \sqrt{17} + \sqrt{19} + \sqrt{21} + \sqrt{23}$$

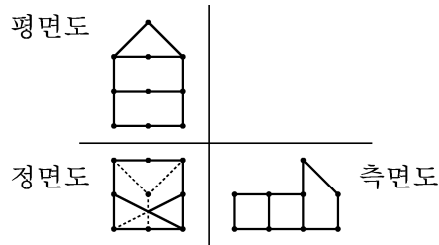
15. 방정식  $[x] + \frac{2004}{[x]} = x^2 + \frac{2004}{x^2}$  의 1이 아닌 해를  $a$ 라 할 때,  $a^2$ 의 값을 구하여라. (단,  $[x]$ 는  $x$ 를 넘지 않는 가장 큰 정수이다.)
16. 다음을 만족시키는 함수  $f(x)$ 에 대하여,  $f(-9)$ 의 값을 기약분수  $\frac{n}{m}$ 으로 나타낼 때,  $10m + n$ 의 값을 구하여라.

$$f(3) = 1, \quad (x^2 - x + 1)f(x^2) = f(x)$$

17. 다음 두 조건을 만족시키는 자연수  $n$ 의 개수를 구하여라.
- (가)  $n$ 은 20보다 큰 소수로 나누어 떨어지지 않는다.
- (나)  $n$ 은 어떤 소수의 제곱으로도 나누어 떨어지지 않는다.
18. 원탁에 둘러 앉아있는 12명 중에서 4명의 위원을 뽑으려고 한다. 인접하여 앉아있는 사람은 선출될 수는 없다고 할 때, 위원을 뽑는 방법의 수를 구하여라.
19. 한 변의 길이가 13인 정사각형  $ABCD$ 에서  $BP = 6$  인 점  $P$ 를 변  $AB$  위에 잡는다. 점  $P$ 에서 변  $BC$ 에 평행한 직선을 긋고 이 직선 위에  $QP = 6$  이 되도록 점  $Q$ 를 사각형  $ABCD$ 의 외부에 잡는다. 직선  $QD$ 와 직선  $PC$ 의 교점을  $R$ 이라 할 때 삼각형  $PQR$ 의 외접원의 반지름의 길이의 제곱은 얼마인가?



20. 평면도, 정면도, 우측면도가 다음과 같은 입체의 부피를 구하여라. (단, 굵게 표시된 점들의 가로와 세로의 간격은 3이고, 점선은 가려서 보이지 않는 모서리를 나타낸다.)



## 고등부

- (중등부 2번과 동일함)
- $p^4 - 5p^2 + 9$  가 소수가 되는 소수  $p$ 의 개수는 얼마인가?
- 자연수  $m, n$ 이 식  $2m^2 + 2n^2 = 137(m - n)$  을 만족시킬 때,  $m + n$ 의 값은 얼마인가?
- 다음 식을 만족시키는  $a, b$ 에 대하여  $\sin^2(a + b)$ 의 값을 기약분수  $\frac{n}{m}$ 으로 나타낼 때,  $10m + n$ 의 값을 구하여라.

$$\sin a + \sin b = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos a + \cos b = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

5. 부등식  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq c$  를 만족시키는 모든 실수  $a, b$  (단,  $0 \leq a, b, \leq 1$ ) 에 대하여, 다음 연립방정식이 실수 해를 갖도록 하는 실수  $c$ 의 최대값은 얼마인가?

$$\begin{cases} a = (1-x)y \\ b = (1-y)x \end{cases}$$

6.  $AB = BC$  인 예각 이등변삼각형  $ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이가 3이다. 점  $A$ 와 외접원의 중심  $O$ 를 잇는 직선과 변  $BC$ 와의 교점  $P$ 에 대하여  $AP = \frac{21}{4}$  일 때, 선분  $AB$ 의 길이의 제곱은 얼마인가?

7. 회원이 7명인 어느 동아리의 구성원을 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7로 나타내기로 하자. 이 동아리에는 3명씩으로 구성된 네 개의 위원회  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 3, 4\}$ ,  $C = \{3, 4, 5\}$ ,  $D = \{1, 2, 4\}$  가 있다. 각 위원회에 한 명씩을 추가하여 4명으로 구성할 때, 새로 구성된 어느 두 위원회의 구성원도 완전히 일치하지는 않도록 추가하는 방법의 수는 얼마인가? (단, 같은 사람을 두 개 이상의 위원회에 추가할 수도 있다.)

8. 1, 2, 3, 4를 사용하여 만든 9자리의 자연수 중에서 다음 조건을 만족시키는 것의 수는 얼마인가?

(가) 최고 자리 수는 1이다.

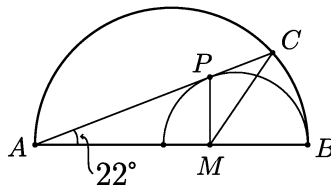
(나) 같은 숫자가 연속하여 나타나지 않는다.

(다) 일의 자리 수는 1이 아니다.

9. 다음 조건을 만족시키는 자연수  $m$ 의 최소값은 얼마인가?

모든 사람이 각각  $m$ 명 이상을 알고 있는 30명의 사람 중에는 모두 서로 아는 4명의 그룹이 항상 있다. (단, A가 B를 알면 B도 A를 알고 있다.)

10. 지름이  $AB$ 인 원에서  $\angle CAB = 22^\circ$  인 현  $AC$ 를 긋자. 주어진 원에 점  $B$ 에서 내접하고, 현  $AC$ 에도 접하는 작은 원을 그린다. 작은 원과 직선  $AC$ 의 접점  $P$ 에서 선분  $AB$ 에 그은 수선의 발을  $M$ 이라 할 때,  $\angle CMB$ 의 크기는 얼마인가?



11. 음이 아닌 정수  $n$ 에 대하여  $f(n) = 2004^n$  이라 하자.  $f(0), f^2(0), f^3(0), \dots$  을 11로 나눈 나머지로 이루어진 집합을  $S$ 라 하자. 이 때, 집합  $S$ 의 모든 원소의 합을 구하여라. (단,  $f^k$ 는  $f$ 를  $k$ 번 합성한 함수이다.)
12. 내접하는 원이 그려져 있는 정사각형의 가로와 세로를 각각 50등분하여 2500개의 작은 정사각형으로 나누었다. 원주의 일부가 그려져 있는 작은 정사각형의 개수를 구하여라.
13. 양수  $a, b$ 에 대하여 식  $a^2 + b + \frac{9}{a+b+1}$  의 최소값을 기약분수  $\frac{n}{m}$ 으로 나타낼 때,  $10m + n$  의 값을 구하여라.
14. 함수  $f(x) = \sin x$  와 다음과 같이 정의된 주기가  $2\pi$ 인 함수  $g(x)$ 에 대하여, 방정식  $(f \circ g)(x) = \frac{x}{2\pi}$  의 실근의 개수를 구하여라.

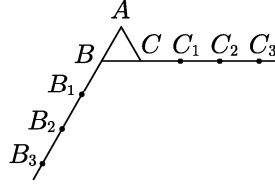
$$g(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 4\pi - 2x, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

15. 상수함수가 아닌 함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.
- (가) 실수  $x$ 에 대하여  $(x^6 - x^5 + x^3 - x + 1)f(x^4) = f(x)$  이다.
- (나) 실수  $x$ 와  $y$ 에 대하여  $f(x+y) = \frac{f(x)f(y)}{(2xy-1)f(x)f(y) + f(x) + f(y)}$  이다.
- 함수  $f(x)$ 의 최대값을 기약분수  $\frac{n}{m}$ 으로 나타낼 때  $10m + n$  의 값을 구하여라.
16. 다음 조건을 만족시키는 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $a_{2002} + a_{2003} + a_{2004}$  의 값을 구하여라.
- (가)  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1, a_5 = 2,$
- (나)  $a_{n+5} = \frac{a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4}}{a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} a_{n+4} - 1} \quad (n \geq 1)$
17. 다음 방정식을 만족시키는 2004보다 크지 않은 자연수의 쌍  $(x, y)$ 의 개수를 구하여라. (단,  $[t]$ 는  $t$ 를 넘지 않는 가장 큰 정수이다.)

$$\left[ \frac{x^2}{y} \right] + \left[ \frac{y^2}{x} \right] = \left[ \frac{x^2 + y^2}{xy} \right] + xy$$

18. (중등부 19번과 동일함)
19. 그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형  $ABC$ 의 변  $AB$ 와  $BC$  각각의 연장선에 간격이 1인 점들이 찍혀 있다. 선분  $B_1C_3$ 의 수직이등분선과 선분  $B_3C_1$ 의 수직이등분

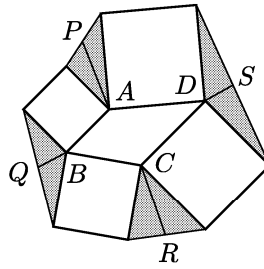
선의 교점을  $P$ 라고 할 때, 선분  $BP$ 의 길이를 구하여라.



20. 다음을 만족시키는 사각형  $ABCD$ 가 있다.

$$AB = 5, BC = 6, CD = 7, \cos \angle B = \frac{1}{5}, \cos \angle C = -\frac{3}{7}$$

그림과 같이 이 사각형의 외부에 정사각형을 그리면 네 개의 빗금친 삼각형을 얻는다. 그림에서 네 선분  $AP, BQ, CR, DS$ 는 각각 빗금친 삼각형의 중선이다. 이 네 중선의 길이의 합을 구하여라.



## 2005년 한국 수학올림피아드 1차시험

### 중등부

- 삼각형  $ABC$ 에서 세 변  $BC, CA, AB$ 의 중점을 각각  $K, L, M$ 이라 하자.  $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 200$  일 때,  $AK^2 + BL^2 + CM^2$ 의 값은?
- 세 자리 양의 정수  $n$ 의 각 자리의 숫자의 합을  $S(n)$ 이라 하자.  $S(n) \leq 5$  이고,  $n$ 이  $S(n)$ 의 배수가 되는  $n$ 의 개수는?
- 정숙이가 정팔각형의 변을 따라 움직이는 로봇을 만들었다. 이 로봇은 정팔각형의 한 변을 지나가는 데 1분이 걸리며, 각 꼭지점에서는 가던 방향으로 계속 가거나 반대 방향으로 방향을 바꿀 수 있다고 한다. 이 로봇이 한 꼭지점  $A$ 에서 출발하여 8분 동안 계속 움직여 꼭지점  $A$ 의 반대편 꼭지점에 도달할 수 있는 경우의 수는?
- 조건  $2 \leq x \leq 4, x \leq y, 3 \leq y \leq 5$ 를 만족시키는 실수  $x, y$ 에 대하여,  $\frac{2+xy}{x+y}$ 의 최댓값은?
- 다음 중, 정수  $x, y, z$ 에 대하여  $x^2 + y^2 + 5z^2$  꼴로 쓸 수 없는 정수는?  
(1) 2003      (2) 2004      (3) 2005      (4) 2020      (5) 2046
- 삼각형  $ABC$ 에서  $\angle A = 30^\circ, AB = AC$ 이다. 점  $A$ 에서 변  $BC$ 에 그은 수선과 점  $B$ 에서 변  $AC$ 에 그은 수선의 교점을  $P$ , 삼각형  $ABP$ 의 외접원과 변  $AC$ 의 교점 중  $A$ 가 아닌 점을  $Q$ 라고 할 때,  $\angle PQC$ 의 크기는?
- 정수  $10^{6015} - 10^{1203} - 10^{15} + 10^k$ 이 2005의 배수가 되도록 하는 최소의 양의 정수  $k$ 는?
- 현선이는 해돋이 구경을 가서 해의 사진을 찍었다. 다녀와서  $1mm$  마다 눈금이 그려진  $2006mm \times 2006mm$  크기의 모눈종이에 지름  $2005mm$ 인 원 모양의 해의 사진을 인화하였다. 해의 중심이 모눈종이의 중심과 일치한다고 할 때, 해의 둘레가 지나가는 모눈종이의 ( $1mm \times 1mm$  크기의) 정사각형의 개수는?
- 함수  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 가  $f(x) + f(1-x) = 7$ 과  $x + f(\frac{x}{3}) = \frac{1}{2}f(x)$ 를 만족시킬 때,  $f(\frac{1}{9})$ 의 값은? (단,  $\mathbb{R}$ 은 실수 전체의 집합이다.)
- 사각형  $ABCD$ 에서  $\angle A = 90^\circ, \angle B = 75^\circ, \angle C = 90^\circ, \angle D = 105^\circ$ 이다. 두 대각선  $AC$ 와  $BD$ 의 교점  $X$ 가  $\angle BXA = 105^\circ$ 를 만족시킬 때, 선분의 길이의 비  $BX : XD$ 는?

11. 실수  $x$ 에 대하여,  $x^2 + \frac{16}{x^2+1}$ 의 최소값을 구하여라.
12. 정수  $k$ 에 대하여, 방정식  $x^3 = 14 + k$ 의 실근에 가장 가까운 정수를  $a_k$ 라 할 때,  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$ 를 구하여라.
13. 양의 정수  $a, b$ 에 대하여,  $y = (x-a)^2$ 의 그래프와  $y = b^2 - x^2$ 의 그래프의 두 교점과 두 그래프의  $y$ -축과의 교점들을 꼭지점으로 하는 사각형의 넓이가  $12\sqrt{7}$ 일 때,  $a+b$ 의 값을 구하여라. (단,  $a < b$ 이다.)
14.  $18x + 19y = 2005$ 를 만족시키는 양의 정수쌍  $(x, y)$ 의 개수를 구하여라.
15. 여러 사람이 모인 자리에서 서로 아는 사람끼리만 한 번씩 악수를 하였다고 하자. 각 사람마다 악수한 횟수가 모두 같고 전체 악수의 횟수가 2005번일 때, 모인 사람의 수가 될 수 있는 가장 작은 수를 구하여라.
16. 볼록사각형  $ABCD$ 에서  $AB = AC = AD$ ,  $\angle CAB = 90^\circ$ 이다. 두 대각선  $AC$ 와  $BD$ 의 교점  $M$ 에 대하여  $AM = 2$ ,  $MC = 1$ 이라 할 때,  $13BD^2$ 을 구하여라.
17. 양의 정수  $d$ 에 대하여,  $d$ 가  $4a^2 + 9b^2$ 과  $ab$ 의 최대공약수가 되도록 하는 서로 소인 양의 정수  $a, b$ 가 존재한다고 한다. 이러한  $d$ 의 개수를 구하여라.
18. 양의 정수 전체의 집합에서 정의된 함수  $f$ 를 생각하자.  $f(1) = 5$ 이고, 임의의 양의 정수  $n$ 에 대하여  $f(n+1)(f(n)-4) = f(n)-6$ 이다.  $f(2005) = \frac{q}{p}$ 로 표현할 때,  $p$ 를 31로 나눈 나머지를 구하여라. (단,  $p$ 와  $q$ 는 서로 소인 양의 정수이다.)
19.  $\angle A = 90^\circ$ 인 직각삼각형  $ABC$ 와 변  $AB$  위의 세 점  $X_1, X_2, X_3$ 에 대하여  $\angle ACX_1 = \angle X_1CX_2 = \angle X_2CX_3 = \angle X_3CB$ 이고,  $BX_3 = 2AX_1$ 이다. 삼각형  $ABC$ 의 가장 작은 각의 크기를  $a^\circ$ 라 할 때,  $7a$ 의 값을 구하여라.
20. 정육각형 모양의 같은 크기의 타일이 빈틈 없이 깔려 있는 어떤 목욕탕의 바닥에서, 가장자리로부터 여러 개의 타일을 뜯어내었다. 남아 있는 타일들이 이루는 도형을 살펴 보았더니, 바깥 변의 개수가 34개였다. 두 개의 타일이 만나는 꼭지점은 14개이고, 세 개의 타일이 만나는 꼭지점은 8개라고 한다. 이 때, 남아 있는 타일의 개수를 구하여라. (단, 붙어 있는 타일들은 변을 공유하면서 붙어 있다고 가정한다.)

## 고등부

1. 세 변의 길이가 각각 15, 20, 25인 삼각형  $ABC$ 의 내접원이 삼각형  $ABC$ 와 점  $X, Y, Z$ 에서 접한다. 삼각형  $XYZ$ 의 넓이는?



2. 볼록  $n$ 각형의 모든 변과 모든 대각선을 빨간색 또는 파란색으로 칠하였더니 빨간색 선분의 개수와 파란색 선분의 개수가 같았다. 다음 중  $n$ 이 될 수 있는 두 수로 이루어진 것은?

(1) 2005, 2006    (2) 2006, 2007    (3) 2007, 2008    (4) 2008, 2009    (5) 2009, 2010

3. 200보다 작은 서로 다른 여섯 개의 소수가 작은 것부터 차례로 등차수열을 이룬다고 할 때, 이 수열의 공차는?

4. 모든 양의 실수  $x$ 에 대하여,  $\frac{1}{2+x^2} \geq \frac{y-x}{2y+x}$  를 만족시키는  $y$ 의 최대값은?

5. 방정식  $x(x - [x]) = 1$  의 해를 작은 것부터 차례로  $x_1, x_2, x_3, \dots$  라 할 때,  $(2x_1 - 1)^2 + (2x_2 - 2)^2 + \dots + (2x_{10} - 10)^2$  의 값은? (단,  $[x]$ 는  $x$ 를 넘지 않는 가장 큰 정수를 나타낸다.)

6. 함수  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  을 생각하자.  $f(5) \neq 0$  이고, 임의의 실수  $x, y$  (단,  $y \neq 0$ ) 에 대하여  $f(x+y)f(x-y) = 2|y|f(\frac{x^2-y^2+25}{2y})$  일 때,  $f(1)f(25)$ 의 값은? (단,  $\mathbb{R}$ 은 실수 전체의 집합이다.)

7. 방정식  $n(m^2 + n^2 - 1) - m(m^2 + n^2 + 47) = 0$  을 만족시키는 양의 정수쌍  $(m, n)$ 의 집합을  $A = \{(m_i, n_i) \mid i = 1, 2, \dots, k\}$  라 할 때  $m_1 + m_2 + \dots + m_k$  의 값은?

8. 다음 중, 정수  $n$ 에 대하여  $n^2 - 2n + 4$  꼴의 배수를 가질 수 없는 소수는?

(1) 29    (2) 31    (3) 37    (4) 43    (5) 61

9.  $\angle A = 90^\circ$ ,  $\angle B = 60^\circ$ ,  $\angle C = 30^\circ$  인 삼각형  $ABC$ 의 내부에 있는 점  $P$ 가  $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$  를 만족시킬 때,  $\sin^2 \angle PAB$  의 값은?

10. 원을 6개의 합동인 부채꼴로 나누어 각 부채꼴을 빨강, 파랑, 노랑, 초록 4개의 색 중 하나의 색으로 칠하기로 하자. 같은 색을 여러 번 사용할 수는 있지만, 이웃한 부채꼴은 다른 색으로 칠하여야 한다. 원을 칠하는 서로 다른 방법의 수를 구하여라. (단, 원을 회전시켜 같아지는 칠하기는 같은 것으로 간주한다.)

11. 256 이하의 양의 정수 중, 2진법으로 표현했을 때 1이 홀수 번 나타나는 것들의 총합을 나누는 가장 큰 홀수를 구하여라.

12. 서로 다른 세 개의 복소수  $a$ 와  $b$ 와  $c$ 에 대하여,  $a^3 = 20a^2 + b^2 + c^2 - a - 340$ ,  $b^3 = 20b^2 + c^2 + a^2 - b - 340$ ,  $c^3 = 20c^2 + a^2 + b^2 - c - 340$  일 때,  $abc$ 의 값을 구하여라.

13. 직사각형  $ABCD$ 의 내부의 점  $P$ 에 대하여,  $\angle APD = 110^\circ$ ,  $\angle BPC = 70^\circ$ ,  $\angle PCB = 30^\circ$  이다.  $\angle PAD$ 의 크기를 구하여라.
14. 양의 정수  $n$ 에 대하여,  $2n$  자리수  $a = (a_1a_2 \cdots a_na_{n+1} \cdots a_{2n})_{(10)}$  을 생각하자. 이 수에 대하여,  $2n$  자리수  $b$ 를  $b = (a_{n+1}a_{n+2} \cdots a_{2n}a_1 \cdots a_n)_{(10)}$  이라 정의하면  $3a = 4b$ 를 만족시킨다고 한다. 이러한 성질을 만족시키는 양의 정수  $a$  가운데 두 번째로 작은 것을  $A$ 라 할 때,  $7A$ 의 각 자리의 숫자의 합을 구하여라. (단,  $a = (\cdots)_{(10)}$  은  $a$ 의 10진법 표현을 나타낸다.)
15. 좌표평면의 점  $(a, b)$ 에서 점  $(a+1, b)$ 로 이동하는 방법을  $x$ -스텝, 점  $(a, b)$ 에서 점  $(a, b+1)$ 로 이동하는 방법을  $y$ -스텝, 점  $(a, b)$ 에서 점  $(a+1, b+1)$ 로 이동하는 방법을  $d$ -스텝이라 하자. 이 세 가지 스텝만을 이용하여 점  $(0, 0)$ 에서 점  $(4, 4)$ 로 이동하는 가능한 모든 경로들에서 사용된  $d$ -스텝들의 총 횟수를 구하여라.
16. 2005 이하의 양의 정수  $n$  중에서  $2n^2 + 3n + 1$  과  $3n^2 + 2n + 3$  이 서로 소가 되도록 하는 것들의 개수를 구하여라.
17. 이차방정식  $(bc-1)x^2 + (a-b+c-abc)x + ab-1 = 0$  이 정수근을 갖도록 하는 한 자리의 양의 정수  $a, b, c$ 에 대하여  $100a + 10b + c$  의 최대값을 구하여라.
18. 중심의  $O$ 이고 반지름의 길이가  $16\sqrt{2}$  인 원과 중심이  $O_1$ 이고 반지름의 길이가  $8\sqrt{2}$  인 원이 두 점에서 만난다. 두 원의 공통접선  $\ell$ 이 원  $O$ 와 점  $A$ 에서 접하고 원  $O_1$ 과 점  $B$ 에서 접한다. 두 원의 교점 중에서 공통접선  $\ell$ 에서 더 멀리 떨어져 있는 점에서의 원  $O_1$ 의 접선이  $A$ 를 지난다고 할 때, 선분  $OO_1$ 의 길이를 구하여라.
19. 1번부터 2005번까지 번호가 매겨진 2005개의 카드를 1번 카드가 맨 위, 그 아래 2번 카드, 그 아래 3번 카드, ..., 2005번 카드가 맨 아래에 오도록 쌓은 카드 더미가 있다. 이제, 2005번 카드부터 시작하여 카드 더미의 맨 아래의 카드는 버리고, 다음 카드는 카드 더미의 맨 위로 보내고, 다시 맨 아래의 카드는 버리고, 다음 카드는 카드 더미 맨 위로 보내는 식의 작업을 계속하기로 하자. 마지막에 남는 카드의 번호를 구하여라.
20. 한 변의 길이가 1인 정사각형  $ABCD$ 에서 점  $X (\neq C)$  는 변  $BC$  위의 점이고 점  $Y (\neq C)$  는 변  $CD$  위의 점이라 하자. 삼각형  $XCY$ 의 둘레의 길이가 2이고,  $\angle DAY = 10^\circ$  이다.  $\angle YXC$ 의 크기를 구하여라.

## 2006년 한국 수학올림피아드 1차시험

### 중등부

1. 점  $B$ 에서 중심이  $O$ 인 원에 그은 두 접선의 접점이 각각  $N, K$ 이다. 선분  $NO$ 의 연장선과 선분  $BK$ 의 연장선이 점  $E$ 에서 만나고, 점  $E$ 에서 이 원에 그은 또 다른 접선의 접점이  $M$ 이다.  $BN = 4, NE = 3$  일 때,  $5KM$ 의 값을 구하여라. [3점]
2. 정수  $2006^{2006}$ 을 100으로 나눈 나머지를 구하여라. [3점]
3. 방정식  $x^2 - \left\lfloor \frac{x}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{3} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{x}{6} \right\rfloor = 2451$ 의 모든 정수해의 합을 구하여라. (단,  $[x]$ 는  $x$ 보다 크지 않은 최대 정수를 나타낸다.) [3점]
4. 정수 0과 1을 중복하여 8번 써서 만든 것을 ‘코드’라 하고, 코드  $A$ 에 대하여  $A$ 에 나타나는 1의 개수를  $f(A)$ 라 하자. 예를 들어, 01000110, 11111111, 00000000 등은 코드이고,  $f(01000110) = 3, f(11111111) = 8, f(00000000) = 0$  이다. 서로 다른 230개의 코드  $A_1, A_2, \dots, A_{230}$ 을 마음대로 만들 때

$$f(A_1) + f(A_2) + \dots + f(A_{229}) + f(A_{230})$$

의 최대값을 구하여라. [3점]

5. 두 직선  $l_1 : y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$ 와  $l_2 : y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$ 에 대하여, 직선  $l$ 이 직선  $l_1$ 과는 제1사분면에서 만나고 직선  $l_2$ 와는 제4사분면에서 만난다. 세 직선  $l, l_1, l_2$  모두와 접하는 원들 중에서  $\{(x, y) : y > 0\}$ 에 포함되는 것을  $C_1$ ,  $\{(x, y) : y < 0\}$ 에 포함되는 것을  $C_2$ 라고 하면,  $C_1$ 의 중심과  $C_2$ 의 중심과의 거리가 20이다.  $l$ 과  $l_1$ 과의 교점을  $P$ ,  $l$ 과  $C_1$ 과의 접점을  $Q$ ,  $l$ 과  $C_2$ 와의 접점을  $R$ 이라고 할 때,  $|PR - PQ|$ 의 값을 구하여라. [3점]
6. 양의 정수  $A$ 를 8진법의 수로 나타내었더니  $(a_n a_{n-1} \dots a_2 a_1)_8$  ( $a_n \neq 0$ ) 이고  $2A$ 를 8진법의 수로 나타내었더니  $(a_1 a_2 \dots a_{n-1} a_n)_8$  이 되었다.  $a_2$ 의 값이 될 수 있는 수를 모두 합하면 얼마인가? (4점)
7. 두 실수  $x, y$ 가

$$2x^2 - 15x + 26 \leq y \leq x^2 - 8x + 20$$

을 만족시킬 때,  $4(x^2 + y)$ 의 최대값과 최소값의 합을 구하여라. (4점)

8. 정수 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8로 만든 순서쌍  $(a_1, a_2, \dots, a_8)$ 들 중 다음 세 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구하여라. (4점)

(1)  $\{a_1, a_2, \dots, a_8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ .

(2)  $a_i > a_{2i}, (1 \leq i \leq 4)$ .

(3)  $a_i > a_{2i+1}, (1 \leq i \leq 3)$ .

9.  $AB = 20, BC = 25, CA = 15$  인 직각삼각형  $ABC$ 에서 변  $AB$ 의 중점이  $M$ , 점  $A$ 에서 변  $BC$ 에 내린 수선의 발이  $H$ 이다. 변  $AC$  위의 점  $P$ 에 대하여  $\angle AHM = \angle AHP$  일 때,  $5AP$ 의 값을 구하여라. (4점)

10. 양의 정수의 집합에서 정의된 함수  $f(n)$ 은 다음 성질을 만족한다고 한다:

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2, \quad f(n+2) = f(n+1) + f(n)^2 + 2006 \quad (n \geq 1).$$

2006개의 정수  $f(1), f(2), \dots, f(2006)$ 들 중 7의 배수는 모두 몇 개인가? (4점)

11. 관계식  $x^2 + y^2 = 2$  를 만족시키는 실수  $x, y$ 에 대하여,  $\frac{15x^2}{2} + 4xy$  의 최대값을 구하여라. (4점)

12. 평면에 놓인 직선 위에 일정한 간격으로 8개의 점이 있다. 다음 조건을 만족시키도록 원들을 그릴 것을 ‘좋은 그림’이라고 할 때, 좋은 그림은 모두 몇 가지인가? (4점)

(1) 각 원은 어느 두 개의 점을 연결하는 선분을 지름으로 가진다.

(2) 각 점은 한 개 또는 두 개의 원 위에 있다.

(3) 어느 두 원이 만난다면, 이들은 외접한다.

13. 삼각형  $ABC$ 에서  $BC = 4, AC = 2, AB = 3$  이고 삼각형  $A'B'C'$ 에서  $A'B' = 1$  이다.  $\angle BAC + \angle B'A'C' = 180^\circ$  이고  $\angle ABC = \angle A'B'C'$  일 때, 삼각형  $ABC$ 의 넓이를  $S$ , 삼각형  $A'B'C'$ 의 넓이를  $S'$ 이라고 하자.  $\frac{S}{S'}$ 의 값을 구하여라. (4점)

14. 양의 정수쌍  $(a, b)$ 에 대하여 유리수  $Q(a, b) = \frac{a^2b + 2ab^2 - 5}{ab + 1}$  을 생각하자. 유리수  $Q(a, b)$ 를 정수가 되게 하는 모든 양의 정수쌍  $(a, b)$ 를  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), \dots, (a_n, b_n)$ 이라 할 때,  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  의 값을 구하여라. (4점)

15. 수직선에서 좌표가 10인 점  $P(10)$ 을 중심으로 양쪽에 대칭으로 놓여 있는 24개의 서로 다른 정수 좌표를 갖는 점  $P_1(x_1), P_2(x_2), P_3(x_3), \dots, P_{24}(x_{24})$ 에 대하여

$$(|x_1 - 1| + |x_1 + 1|) + (|x_2 - 1| + |x_2 + 1|) + \dots + (|x_{24} - 1| + |x_{24} + 1|)$$

의 최소값을 구하여라. (4점)

16. 철희가 어떤 모임에 나갔는데, 이 모임에 모두 631명이 참석하고 있다고 한다. 임의의 세 참석자 중에는, 서로 모르는 두 명이 반드시 있다고 한다. 만약 임의의 참석자  $A$ 와  $B$ 가 서로 모르면,  $A$ 와  $B$ 를 모두 아는 참석자가 정확히 두 명이 있다고 한다. 철희가 아는 참석자는 모두 몇 명인가? (5점)
17. 원에 내접하는 사각형  $ABCD$ 에 대하여 변  $AB$  위에 중심  $O$ 를 갖는 다른 원이 사각형  $ABCD$ 의 다른 세 변  $AD$ ,  $DC$ ,  $CB$ 와 각각  $E$ ,  $F$ ,  $G$ 에서 접한다.  $FC = \sqrt{2}$ ,  $AO = 3AE$  일 때  $AE$ 의 길이를  $a$ 라고 하자.  $4a^2$ 의 값을 구하여라. (5점)
18. 적당한 정수  $m, n$ 에 대하여  $m(5m + 4n)$ 꼴로 쓸 수 있는 양의 정수들 중 2006 이하인 것은 모두 몇 개인가? (5점)
19. 정의역이 0 이상 11 이하인 실수들의 집합이고 함수값이 항상 0 이상인 함수  $f$ 가 다음 두 조건을 만족시킬 때,  $f(2)^2 + f(10)^2$ 의 값을 구하여라. [5점]
- (1)  $f(0) = 0, f(6) = 1$ ;
- (2)  $x \geq 0, 0 \leq y, x + y \leq 11$  이면  $f(x + y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}$ .
20. 가로 5, 세로 2인 칠판이 벽에 고정되어 있다. 칠판을 여러 개의 사각형들만으로 분할한 것을 ‘그림’이라 하자. 각각의 분할된 사각형이 한 변의 길이가 1인 정사각형이거나 가로 1, 세로 2인 직사각형이거나 또는 가로 2, 세로 1인 직사각형일 때 그 그림을 ‘멋진 그림’이라 하자. 멋진 그림은 모두 몇 개인가? (5점)

## 고등부

1. 중심이  $O$ 이고 반지름의 길이가 5인 원에 내접하는 등변사다리꼴의 두 대각선의 교점이  $P$ 이다. 점  $P$ 에 의해 두 부분으로 나누어진 한 대각선의 긴 부분의 길이는 6, 짧은 부분의 길이는 2일 때,  $OP$ 의 길이는  $a$ 이다.  $a^2$ 의 값을 구하여라. [4점]
2. 주어진 양의 정수  $m$ 에 대하여,  $m^{1003}$ 은 77로 나눈 나머지가 19라고 한다. 정수  $m$ 을 77로 나눈 나머지를 구하여라. [4점]
3. 실수  $a, b$ 가 각각

$$a = \sum_{n=1}^{99} \frac{1}{n(n+1)^2(n+2)}, \quad b = \sum_{n=1}^{99} \frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)}$$

로 주어져 있다.  $3a + 2b = \frac{q}{p}$ 를 만족하는 서로 소인 양의 정수  $p, q$ 에 대하여  $q$ 를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라. [4점]

4. 모든 항이 정수인 등차수열  $\{a_n\}$ 들 중에서  $\{1, 1000\} \subset \{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}$  를 만족시키는 등차수열  $\{a_n\}$ 의 개수를 구하여라. [4점]
5. 삼각형  $ABC$ 에 대하여, 변  $AB$  위의 한 점  $P$ 를 지나며 변  $BC$ 에 평행인 직선과 변  $AC$ 와의 교점을  $Q$ 라 하고, 또 점  $P$ 를 지나며 변  $AC$ 에 평행인 직선과 점  $Q$ 를 지나며 변  $AB$ 에 평행인 직선과의 교점을  $R$ 이라 하자. 삼각형  $ABC$ 의 넓이를  $S$ , 삼각형  $ABC$ 와 삼각형  $PQR$ 의 공통 부분의 넓이를  $T$ 라고 할 때,  $\frac{S^2}{T}$ 의 최소값을 구하여라. [4점]
6. 정수  $7(3^{527}) - 1$  은 정수  $3^m$ 으로 나누어진다. 이러한 성질을 만족하는 정수  $m$ 들 중 가장 큰 것을 구하여라. (5점)
7. 실수  $x, y, z$ 는  $3x + 2y + z = 1$  을 만족시킨다고 한다.

$$\frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|y|} + \frac{1}{1+|z|}$$

의 최대값을 서로 소인 양의 정수  $p, q$ 에 대하여  $\frac{q}{p}$ 로 표현할 때  $p+q$ 의 값을 구하여라. (5점)

8. 함수  $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  중에서 다음 두 조건을 만족시키는 것들의 개수를  $x$ 라 할 때,  $x$ 를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라. [5점]

(1) 모든  $n$ 에 대해서  $f(n) - n$  은 홀수이다.

(2) 모든  $n$ 에 대해서  $f(f(n)) \neq n$  이다.

9. 한 변의 길이가 40인 정오각형의 각 변의 중점을 시계반대방향으로 각각  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$ 라 하고, 선분  $M_2M_4$ 의 중점을  $X$ , 선분  $M_3M_5$ 의 중점을  $Y$ 라고 할 때,  $(XY)^2$ 의 값을 구하여라. (5점)

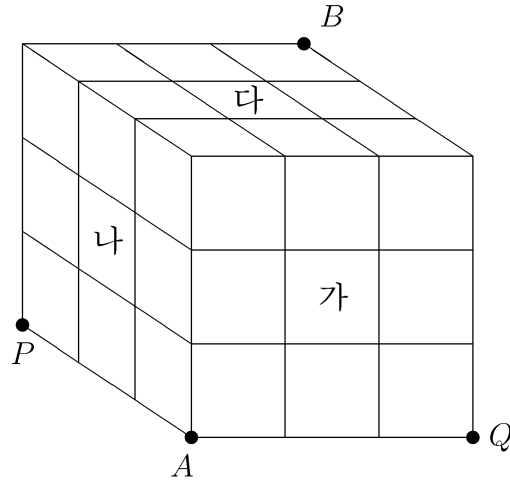
10. (중등부 14번과 동일하므로 생략)

11. 세 각의 크기가  $50^\circ, 60^\circ, 70^\circ$ 인 삼각형  $T_1$ 이 있다.  $T_1$ 의 외접원의 중심에서  $T_1$ 의 각 변에 수직하게 그은 반직선이 외접원과 만나는 세 점을 꼭지점으로 갖는 삼각형을  $T_2$ 라 하자.  $T_2$ 에 대하여 같은 방식으로  $T_3$ 을 만들고, 계속하여  $T_4, \dots, T_n$ 을 만들어나간다.  $T_n$ 의 세 내각 중 가장 작은 것의 크기를  $a_n^\circ$ 라 할 때,  $60 - a_n < \frac{1}{1000}$  을 만족시키는  $n$ 의 최소값을 구하여라. (5점)

12.  $|x| + |y| + |z| + |w| \leq 10$  을 만족시키는 네 정수의 순서쌍  $(x, y, z, w)$ 의 개수를  $n$ 이라 할 때,  $n$ 을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라. (5점)

13.  $AB = 2$ ,  $BC = 100$ ,  $\angle B = 90^\circ$  인 직각삼각형  $ABC$ 에서 변  $BC$  위를 움직이는 점  $P$ 가 있다. 변  $AB$ 의 중점  $D$ 에 대하여  $\angle APD$ 의 최대값을  $\theta$ 라고 할 때,  $\frac{1}{\sin \theta}$ 의 값을 구하여라. (5점)
14. (중등부 18번과 동일하므로 생략)
15. (중등부 6번과 동일하므로 생략)
16. 집합  $S$ 는 1부터 11까지의 양의 정수들로 이루어진 집합이다.  $S$ 의 공집합이 아닌 부분집합들 중에서 원소들의 합을 5로 나눈 나머지가 1인 것은 모두 몇 개인가? (6점)
17. 볼록육각형  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 에서  $A_1A_2 + A_1A_6 = 2$ ,  $A_2A_3 = 2$ ,  $A_1A_4 = 4$ , 사각형  $A_2A_3A_5A_6$ 은 평행사변형, 삼각형  $A_3A_4A_5$ 는 정삼각형이다. 이러한 볼록육각형의 넓이를  $S$ 라고 할 때,  $S$ 의 최대값과 최소값의 곱을 구하여라. (6점)
18. 수열  $\{a_n\}$ 은  $a_1 = 1$  이고 모든 양의 정수  $n$ 에 대하여,  $a_{n+1} = 3^{a_n} + 1$  을 만족한다.  $a_n$ 을 100으로 나눈 나머지를  $b_n$ 이라 할 때  $b_{2006} + b_{2007} + \cdots + b_{2015}$  의 값을 구하여라. (6점)
19. 함수  $f: [0, 6] \rightarrow [-4, 4]$  가 다음 두 조건을 만족시킬 때,  $\{f(3) + 2f(1)\}^2$  의 값을 구하여라. [6점]
- (1)  $f(0) = 0$ ,  $f(6) = 4$ .
- (2)  $x \geq 0$ ,  $0 \leq y$ ,  $x + y \leq 6$  이면
- $$f(x+y) = \frac{1}{4}\{f(x)\sqrt{16-f(y)^2} + f(y)\sqrt{16-f(x)^2}\}.$$
20. 한 변의 길이가 3인 정육면체의 면에 그림과 같이 격자가 그려져 있다. ‘가’는 앞면, ‘나’는 옆면, ‘다’는 윗면이다. 점  $A$ 에 있는 개미가 점  $B$ 에 있는 먹이를 가지고 점  $A$ 로 돌아오는데 개미는 그림의 선분들만을 따라 최단 경로로 움직이되, 한 번 지나간 점을 다시 지나가지 않으며, 갈 때는 ‘나’면의 내부와 점  $P$ 를 지나지 않고 올 때는 ‘가’면의 내부와 점  $Q$ 를 지나지 않는다. 개미가 선택할 수 있는 서로 다른 경로의 수를  $x$ 라

할 때,  $x$ 를 100으로 나눈 나머지를 구하여라. [6점]





제 I 부

풀이편



## 2003년 한국 수학올림피아드 풀이

### 중등부

#### KMO 2003-R1-M1

$a$ 와  $b$ 는 모두 1 이상 100 이하의 정수이다. 이 때, 두 수의 합  $a+b$  를 3으로 나누면 나머지가 2이고, 두 수의 곱  $ab$ 를 3으로 나누면 나머지가 1인 정수의 순서쌍  $(a, b)$ 는 모두 몇 개인가?

#### KMO 2003-R1-M2

$2^{1000}$ 을 100으로 나눈 나머지는 얼마인가?

#### KMO 2003-R1-M3

양의 정수  $m, n$ 에 대하여  $m^2 + 2n^2$  을 8로 나누었을 때 나타날 수 있는 나머지를 모두 구하여라.

#### KMO 2003-R1-M4/H1

정11각형의 꼭지점에 시계방향으로  $1, 2, 3, \dots, 11$  로 번호가 붙여져 있고 토끼는 이 도형을 다음의 규칙에 따라 이동한다고 하자.

꼭지점  $k$ 에서는 시계방향으로 다음  $k^2$ 번째 꼭지점으로 이동한다. (예를 들어 꼭지점 3에서는 꼭지점 1로, 또, 꼭지점 4에서는 꼭지점 9로 이동한다.)

이 규칙을 2003회 적용하여 꼭지점 2에 토끼가 도착하게 되는 출발점은 모두 몇 개인가?

**풀이** 각각의 수에 대해서 조사해보면

$$1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 2$$

$$2 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 2$$

$$3 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 2$$

$$4 \rightarrow 9 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 2$$

$$5 \rightarrow 8 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 2$$

$$6 \rightarrow 9 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 2$$

$$7 \rightarrow 1 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 2$$

$$8 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 2$$

$$9 \rightarrow 2 \rightarrow 6 \rightarrow 9 \rightarrow 2$$

가 된다. 이 때  $2003 = 3(667) + 2$  이므로 2003번 해서 꼭지점으로 가는 경우는 3, 4, 6, 7에서 출발하는 4가지 경우이다. ◇

**KMO 2003-R1-M5**

$x, a, b, c, d$ 는 유리수이다.

$$\frac{1}{x + \sqrt{2} + x\sqrt{3} + \sqrt{6}} = a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3} + d\sqrt{6}$$

일 때  $a$ 의 값은?

**풀이**  $(1+x)$ 와  $(1-x)$ 는 1에 대칭적인 값이다.  $x = \pm 7$  을 대입하면  $f(-6)$ 과  $f(8)$ 의 값을 함께 구할 수 있다.

$$(1) \ x = 7 \text{ 대입: } f(8) + 7f(-6) = 7^2 + 7 = 56.$$

$$(2) \ x = -7 \text{ 대입: } f(-6) - 7f(8) = (-7)^2 - 7 = 42.$$

아래 식의  $f(8)$ 에 위 식을 대입한다.

$$f(-6) - 7\{56 - 7f(-6)\} = 42$$

$$50f(-6) = 42 + 392 = 434$$

$$f(-6) = 8.68$$

... **답** 8.68 ◇

**주**  $f(-6)$ 의 값을 기약분수  $\frac{b}{a}$ 로 나타냈을 때  $a+b$ 의 값을 구하여라: 242

## KMO 2003-R1-M6

함수  $f(x)$ 는 임의의 실수  $x$ 에 대하여

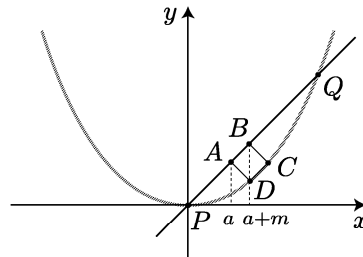
$$f(1+x) + xf(1-x) = x^2 + x$$

를 만족시킨다.  $f(-6)$ 의 값을 구하여라.

## KMO 2003-R1-M7

직선  $y = x$  와 포물선  $y = x^2$  으로 둘러싸인 영역 안에 정사각형이 있다. 이 정사각형의 한 변은  $y = x$  위에 있고, 두 꼭지점은  $y = x^2$  위에 있다. 이 정사각형의 넓이는 얼마인가?

**풀이** 직선과 포물선은 두 점  $P(0,0)$ ,  $Q(1,1)$ 에서 만나고 정사각형은 포물선을  $PQ$ 로 자른 활꼴 안에 있다. 정사각형의  $y = x$  위에 있는 두 점의 좌표를  $A(a, a)$ ,  $B(a+m, a+m)$ 라 하자( $m > 0$ ).



그럼 나머지 두 점의 좌표는  $C(a+2m, a)$ ,  $D(a+m, a-m)$ 이고, 이 둘은 포물선  $y = x^2$  위에 있으므로

$$a = (a+2m)^2$$

$$a-m = (a+m)^2$$

이 성립한다. 두 식을 변변 빼면  $m = 2ma + 3m^2$ , 즉  $1 = 2a + 3m$  이다.  $a = \frac{1}{2}(1-3m)$  을 위의 두 번째 식에 대입하면

$$\frac{1-3m}{2} - m = \left( \frac{1-3m}{2} + m \right)^2$$

$$2-6m-4m = (1-3m+2m)^2$$

$$2-10m = (1-m)^2$$

$$0 = m^2 + 8m - 1$$

여기서  $m > 0$  인 해를 구하면  $m = -4 + \sqrt{17}$  이 되고, 정사각형의 넓이는  $S = \frac{1}{2} \cdot 2m \cdot 2m = 2m^2$  이므로 위의  $m^2 = 1-8m$  을 이용해 간단히 하면  $S = 2m^2 = 2-16m = 66-16\sqrt{17}$  이 된다. ... **답**  $66-16\sqrt{17}$  ◇

**KMO 2003-R1-M8**

$a, d \neq 0$  인 네 자리 자연수  $abcd$ 가 있다. 이것의 각 자리수의 순서를 바꾸어 얻은 네 자리 자연수  $dcba$ 를 생각하자.

$$\sqrt{abcd - dcba}$$

의 값이 자연수가 될 때, 이 식의 최대값은 얼마인가?

**KMO 2003-R1-M9**

대한중학교의 학생수는 500명이고 동아리의 수는 20개이다. 이제 학생들에게 1부터 500까지의 고유번호를 부여하고 20개의 동아리를  $C_1, C_2, \dots, C_{20}$  으로 나타낼 때, 동아리  $C_i$ 에 속한 학생수는  $(i+10)$ 이라고 한다. 고유번호가  $j$ 인 학생이 속한 동아리의 수를  $d_j$ 라고 할 때, 다음 값은 얼마인가? (단, 한 학생이 여러 개의 동아리에 동시에 가입할 수도 있고, 또는 아무 동아리에도 가입하지 않을 수도 있다.)

$$d_1 + d_2 + \dots + d_{500}$$

**풀이** 구하는 값이 각 학생이 활동하고 있는 동아리의 수를 모두 합친 것인데 이 값은 각 동아리에 등록된 회원수를 모두 더한 것과 같다. 그러므로

$$d_1 + d_2 + \dots + d_{500} = C_1 + C_2 + \dots + C_{20} = 11 + 12 + \dots + 30 = 410.$$

... **답** 410

◇

**KMO 2003-R1-M10**

다섯 쌍의 부부가 모임에 참가하였다. 사회자가 그 중 다섯 명을 뽑아 선물을 준다. 이 때, 선물을 하나도 받지 못한 부부가 오직 한 쌍일 경우의 수는 몇 개인가?

**풀이** 5쌍 중에 한 쌍만 선물을 못 받았으면 한 쌍만 부부 모두 선물을 받아야 한다. 5쌍 중에 선물을 받지 못한 한 쌍을 고르는 방법의 수 = 5. 남은 4쌍 중에 선물을 부부 모두 받을 한 쌍을 고르는 방법의 수 = 4. 남은 세 쌍들이 각각 선물을 하나씩 받는데 부부 중에 누가 받을지 고르는 수 =  $2^3$ . 따라서 총 경우의 수는  $5 \times 4 \times 2^3 = 160$ 가지이다. ... **답** 160

◇

**KMO 2003-R1-M11**

가로, 세로가 각각 420 cm, 370 cm 인 직사각형 모양의 벽  $ABCD$ 에 한 변의 길이가 10 cm인 정사각형 모양의 타일을 딱 차게 붙였다. 이 때, 대각선  $AC$ 가 지나가는 타일의 수는 몇 개인가?

**풀이** 타일과 타일 사이에 선이 있다고 생각하면 가로줄 43개와 (모서리 포함) 세로줄 38개가 있다. 대각선은 모든 가로, 세로 줄과 한 번씩 만난다. 이 때  $AB, AD$ 와 동시에 만나고  $BC, CD$ 와 동시에 만나므로 총 79번 만난다. 왼쪽 위부터 대각선이 출발해서 오른쪽 아래로 내려온다고 생각하면 대각선과 이 선이 만나는 개수가 하나씩 늘 때마다  $AC$ 가 지나가는 타일의 수가 하나씩 늘다. 처음 타일을 지날 때 2번 만나고, 3번 만나는 순간 두 번째 타일을 모두 지나간다. 이런 식으로 79번째 마지막 만날 때 78번째 타일을 모두 지나간다. 따라서 78개가 답이다. ... **답** 78 ◇

### KMO 2003-R1-M12

7을 두 개 이상의 자연수의 합으로 표현하는 방법의 수는 몇 개인가? (단, 더하는 순서가 다르면 다른 표현으로 본다. 예를 들어,  $2+2+3, 2+3+2, 3+2+2$  는 모두 다른 것으로 본다.)

**풀이** 우선 7을

$$1+1+1+1+1+1+1$$

로 쓰자. 그리고, 여기 나열된 6개의  $+$ 에 대해, 각각의  $+$ 를 제거할 것인지 그냥 둘 것인지 결정하자. 하나의  $+$ 를 제거한다는 것은 그 앞과 뒤의 수가 하나의 수로 합해지는 것을 의미한다. 각각의  $+$ 에 대해 두 가지 중 한 가지를 택하는 선택을 하므로 모두  $2^6 = 64$ 가지의 경우가 있다. 단, 6개의  $+$ 를 모두 제거하는 경우는 7을 그냥 하나의 수 7로 쓰는 것이므로 (두 개 이상의 자연수의 합으로 표현한 것이 아니라는) 제외해야 한다. ... **답** 63가지 ◇

**주** 일반적으로  $n$ 을 1개 이상의 자연수의 합으로 표현하는 방법의 수는  $2^{n-1}$ 가지가 될 것이다.

**별해**  $n$ 을 한 개 이상의 자연수의 합으로 표현하는 방법의 수를  $a_n$ 이라 하자.  $a_{n+1}$ 에 대해 생각하자.  $n+1$ 을 합으로 나타내었을 때 맨 처음의 수가 1인 경우는 그 다음부터  $n$ 을 합으로 나타내는 경우가 되므로  $a_n$ 가지이다. 또, 맨 처음의 수가 2 이상인 경우는, 그 수를  $x$ 라 하면,  $x$  대신  $x-1$ 로 바꾸어쓰면 역시  $n$ 을 합으로 나타내는 경우가 되므로  $a_n$ 가지이다. 따라서,

$$a_{n+1} = 2a_n$$

의 점화식이 성립하고,  $a_1 = 1$  임으로부터 이 점화식을 풀면  $a_n = 2^{n-1}$  이 된다.  $n$ 을 두 개 이상의 자연수의 합으로 표현하는 방법의 수는  $a_n - 1 = 2^{n-1} - 1$  가지이다. ◇

**KMO 2003-R1-M13**

반지름의 길이가  $3\text{ cm}$ 인 공을 내부에 포함하는 볼록한 다면체의 부피는  $V\text{ cm}^3$ 이고 겉넓이는  $A\text{ cm}^2$ 이다. 다음 중 일어날 수 없는 경우는? (단, 공이 다면체의 면에 접하는 경우도 공이 다면체에 포함되는 것으로 본다.)

- (1)  $V < A$     (2)  $V = A$     (3)  $A < V < 2A$     (4)  $V = 3A$     (5)  $3A < V$

**KMO 2003-R1-M14**

직육면체  $ABCD-EFGH$ 의 내부의 한 점  $P$ 에 대하여  $PC = 4$ ,  $PF = 5$ ,  $PG = 6$ ,  $PH = 7$ 이라 할 때, 선분  $PA$ 의 길이는?

[그림]

**KMO 2003-R1-M15**

정팔각형  $ABCDEFGH$ 의 대각선  $AD$ ,  $DG$  위에 점  $M$ ,  $N$ 을 각각 잡을 때  $AM : MD = DN : NG = a : (1 - a)$  라고 하자. 점  $M$ ,  $N$ 과 꼭지점  $C$ 가 일직선 위에 있을 때  $a^2$ 의 값은 얼마인가? (단,  $0 < a < 1$ )

**KMO 2003-R1-M16**

정수  $a, b, c$ 가

$$a + 2b + 3c = 35, \quad ab + bc + ca = 61$$

을 만족시킬 때,  $a$ 의 최대값을 구하여라.

**풀이** (전남과학고 1학년 심민수)

$a = 35 - 2b - 3c$  를 오른쪽 식  $a(b+c)+bc = 61$  에 대입하면  $35(b+c) - 2b^2 - 3c^2 - 5bc + bc = 61$  이고, 이것을  $b$ 에 관한 내림차순으로 정리하면

$$2b^2 + (4c - 35)b + (3c^2 - 35c + 61) = 0$$

이 된다. 정수해  $b$ 가 존재해야 하므로 근의 공식

$$b = \frac{(35 - 4c) \pm \sqrt{D}}{4} \quad (*)$$

풀에서  $\pm\sqrt{D} = 4b - (35 - 4c)X$  가 정수, 즉  $D$ 는 완전제곱수라야 한다.

$$D = (4c - 35)^2 - 8(3c^2 - 35c + 61) = 737 - 8c^2$$



에서  $D$ 는 홀수임을 알 수 있으므로  $D = (2n+1)^2$  이라 하면( $n \geq 0$ ),  $4n(n+1) = 736 - 8c^2$ , 즉

$$\frac{n(n+1)}{2} = 92 - c^2$$

여기서  $|c| \leq 9$  임을 알 수 있고, 이 범위에서  $92 - c^2$  이  $\frac{n(n+1)}{2} = 1 + 2 + \dots + n$  꼴의 수가 되는 것을 찾으면 된다.

$$92 - c^2 = 92, 91, 88, 83, 76, 67, 56, 43, 28, 9$$

$$\frac{n(n+1)}{2} = 0, 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66, 78, 91, \dots$$

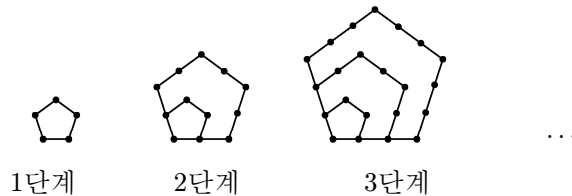
등이 가능하므로, 겹치는 것은 28과 91뿐이다. 즉,  $|c| = 1$  or 8이고, 그 때 각각  $n = 13$ 과 7이어서  $\sqrt{D} = 27, 15$ 이다. (\*)에 대입하여  $b$ 가 정수가 되는 경우들을 구하면

$$(b, c) = (1, 1), (3, -1), (-3, 8), (13, -8)$$

이다. 각각의 경우  $a = 35 - 2b - 3c = 30, 32, 17, 33$ 이므로  $a$ 의 최대값은 33이다. ◇

#### KMO 2003-R1-M17

오각형의 각 변에 아래 그림과 같이 점을 찍어 나간다. 19단계에서 점은 모두 몇 개인가?



**풀이**  $P_0 = 1, P_1 = 5, P_2 = 12, \dots$  인데  $n$ 번째 단계에서 새로 생기는 꺾질은  $n+1$ 개씩의 점을 가진 3개의 변으로 이루어져 있다. 그중 2개의 점을 중복되므로

$$P_n - P_{n-1} = 3(n+1) - 2 = 3n + 1$$

이다. 따라서,

$$\begin{aligned} P_n &= (P_n - P_{n-1}) + (P_{n-1} - P_{n-2}) + \dots + (P_1 - P_0) + P_0 \\ &= (3n+1) + (3(n-1)+1) + \dots + (3+1) + 1 \\ &= 3 \cdot \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) = \frac{(n+1)(3n+2)}{2} \end{aligned}$$

그럼 구하는 값은  $P_{19} = \frac{20 \cdot 59}{2} = 590 \dots$  **답**

◇

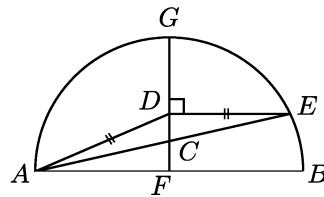
## KMO 2003-R1-M18

중학생 진희는 집에서 최단 경로를 따라 약속 장소인 극장으로 가다가, 약속 장소가 서점으로 바뀌었다는 연락을 어떤 사거리에서 받고, 곧바로 최단 경로를 따라 서점으로 갔다. 진희가 집에서 서점에 가기까지 택하였을 수 있는 모든 경로의 수는 몇 개인가?

[집(0.5,1), 서점(5.5,1), 극장(5.5,5)의 좌표에 있는 그림]

## KMO 2003-R1-M19

선분  $AB$ 를 지름으로 갖는 원  $O$ 가 주어져 있다. 지름  $AB$  위의 한 점  $F$ 에서 수선을 그어 원  $O$ 와 만나는 한 점을  $G$ 라 하자. 선분  $FG$  위의 한 점  $C$ 를 잡아 직선  $AC$ 와 원호  $GB$ 의 교점을  $E$ 라고 하고, 점  $E$ 에서 선분  $FG$ 에 내린 수선의 발을  $D$ 라고 하자. 이 때,  $\angle ACD = 2\angle ADC$  이고  $AD = DE$  라면,  $\angle CAD$ 의 크기는 얼마인가?



**풀이** (제주중앙중 1학년 김수현)  $\angle CAD = a$  라 하고  $\angle ADC = b$  라 하면,  $\triangle AED$ 와  $\triangle ACD$ 에서 각각

$$2a + b + 90^\circ = 180^\circ, \quad a + 3b = 180^\circ$$

이 연립방정식을 풀면  $a = 18^\circ$ ,  $b = 54^\circ$ . 따라서, 답은  $\angle CAD = 18^\circ$ .

◇

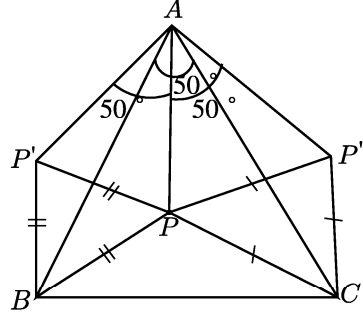
## KMO 2003-R1-M20

내각이 모두  $120^\circ$ 보다 작은 삼각형  $ABC$ 의 내부의 점  $P$ 가

$$AP \cdot BC = BP \cdot CA = CP \cdot AB$$

를 만족한다고 하자.  $\angle BAC = 50^\circ$  일 때,  $\angle BPC$ 의 크기는 얼마인가?

**풀이** (대덕중 3학년 이태희)



$\triangle APC$ 를 닮은 도형으로  $\triangle AP'B$ 가 되게  $P'$ 을 잡고,  $\triangle APB$ 를 닮은 도형으로  $\triangle AP''C$ 가 되게  $P''$ 을 잡자.  $BP' : AB = CP : AC$  이므로

$$BP' = \frac{AB \cdot CP}{AC} = BP$$

이 때,  $\angle P'AP = \angle BAC = 50^\circ$  이고  $AP' : AP = AB : AC$  이므로,  $\triangle AP'P$ 는  $\triangle ABC$ 와 닮음. 따라서,

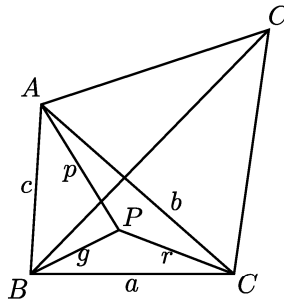
$$PP' = \frac{AP \cdot BC}{AC} = BP$$

즉,  $\triangle BP'P$ 는 정삼각형이다. 같은 방법으로  $\triangle PCP''$ 도 정삼각형. 따라서,

$$\begin{aligned} \angle BPC &= 360^\circ - \angle P'PB - \angle P''PC - (\angle APP' + \angle APP'') \\ &= 360^\circ - 60^\circ - 60^\circ - (180^\circ - 50^\circ) = 110^\circ \end{aligned}$$

답은  $110^\circ$ 이다. ◇

**별해** (KAIST 과학영재센터 연구원 고봉균)  $BC, CA, AB, AP, BP, CP$ 를 각각  $a, b, c, p, q, r$ 이라 하자. 그럼  $ap = bq = cr$ .  $\triangle ABP \sim \triangle C'BC$  되게  $C'$ 을  $\angle ABC$  안에 잡자.



그럼  $CC' = \frac{ap}{q} = b$ . 또  $\angle ABC' = \angle PBC$  이고  $c : q = x : a$  이므로  $\triangle ABC' \sim \triangle PBC$ .  
그럼  $AC' = \frac{cr}{q} = b$ . 따라서,  $\triangle ACC'$ 은 정삼각형이다. 따라서,  $\angle BPC = \angle BAC' =$

$$50^\circ + 60^\circ = 110^\circ.$$

[주]  $C = A' = B''$  로 하고  $A'BC''$ 이 정삼각형이 되도록  $C''$ 을 잡자. 그리고,  $\triangle ABC \equiv \triangle A'B'C' \equiv \triangle A''B''C''$  이 되도록 하자. 그럼 육각형  $ABC''A''B'C'$ 가 생기고  $\triangle A''B'C'$ 도 정삼각형이 된다. 그리고,  $\triangle AC''B'$ 과  $\triangle A''C'B$ 은 모두 한 변의 길이가  $\frac{abc}{M}$ 인 정삼각형이 된다. 단,  $M = ap = bq = cr$ .  $\diamond$

## 고등부

### KMO 2003-R1-H2

합하는 순서를 무시하고 20을 2의 지수 형태의 자연수의 합으로 표시하는 가지수는 얼마인가? (예를 들어,  $2^2 = 2^1 + 2^1 = 2^1 + 2^0 + 2^0 = 2^0 + 2^0 + 2^0 + 2^0$  이므로 4를 위의 형태의 합으로 표시하는 가지수는 4가 된다.)

**풀이**  $2^0$ 을 하나 이상 포함하는 경우와 그렇지 않은 경우로 나누면  $f(2n+1) = f(2n) = f(2n-1) + f(n)$ 의 점화식을 얻을 수 있다. 이것으로 좀 계산해주면  $f(20) = 60$ 이 된다.  $\diamond$

### KMO 2003-R1-H3

함수  $f: [1, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ 가 다음 조건을 만족시킬 때,  $f(\frac{229}{4})$ 의 값은 얼마인가?

- (a)  $f(2) = 2$  이고,
- (b) 임의의 양수  $x, y$ 에 대하여 다음이 성립한다.

$$\{f(x+y+1)\}^2 = \{f(x+1)\}^2 + \{f(y+1)\}^2$$

**풀이**  $g(x) = f(x+1)^2$ 으로 치환하면  $g(1) = 4$  이고

$$g(x+y) = g(x) + g(y)$$

가 된다. 이것은 코시함수방정식이므로, 수학적 귀납법으로 임의의 유리수  $r$ 에 대해

$$g(rx) = rg(x)$$

임을 알 수 있다.  $g(1) = 4$  이므로,

$$f\left(\frac{229}{4}\right)^2 = g\left(\frac{225}{4}\right) = \frac{225}{4}g(1) = 225$$

따라서,  $f(\frac{229}{4}) = 15$  이다.  $\diamond$

## KMO 2003-R1-H4

조건  $x^4 - 2y^2 = 1$  을 만족시키는 정수의 순서쌍  $(x, y)$ 의 개수는 모두 몇 개인가?

**풀이**  $x$ 는 홀수임을 알 수 있고, 그럼

$$2y^2 = (x-1)(x+1)(x^2+1)$$

에서  $y$ 는 짝수이다.  $y = 2Y$ ,  $x = 2X + 1$  을 대입하고 양변을 8로 나누면

$$Y^2 = X(X+1)(2X(X+1)+1)$$

인데, 우변의 세 항이 모두 서로 소이므로 모두  $\pm$ 완전제곱수여야 한다.  $X$ 와  $X+1$ 의 차는 1인데  $\pm n^2$ 꼴들의 수 중에서 차이가 1이 되는 경우는  $-1$ 과  $0$ , 그리고  $0$ 과  $1$ 뿐이다. 즉,  $X(X+1) = 0$  으로 어느 경우나  $Y = 0$ , 즉  $y = 0$  이다. 따라서, 해는  $(\pm 1, 0)$ 의 2개 뿐이다. ◇

## KMO 2003-R1-H5

실수  $x, y, z$ 가 조건

$$4(x+y+z) = x^2 + y^2 + z^2$$

을 만족시킨다. 식  $xy + yz + zx$  의 최대값을  $a$ , 최소값을  $b$ 라 할 때,  $10a + b$  의 값은 얼마인가?

**풀이**  $A = x + y + z$ ,  $B = x^2 + y^2 + z^2$ ,  $C = xy + yz + zx$  라 하면 문제에서

$$4A = B$$

이다. 이로부터  $A^2 = B + 2C = 4A + 2C$ , 즉

$$C = \frac{1}{2}(A-2)^2 - 2$$

가 된다. 또, 잘 알려진 부등식  $C \leq B$  에서  $A^2 = B + 2C \leq 3B = 12A$ , 즉

$$0 \leq A \leq 12$$

이 범위에서  $C$ 는

$$-2 \leq C \leq 48$$

이 되고,  $(x, y, z) = (2, -\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ,  $(4, 4, 4)$  등으로 등호가 성립하는 경우도 각각 존재한다. ... **답** 478 ◇

## KMO 2003-R1-H6

$x$ 의 5차 다항식

$$Q(x) = a - x(x-1)(x-a) \frac{x^2 - ax + a^2}{a^3} \quad (0 < a < 1)$$

에 대하여 폐구간  $[0, a]$ 에 있는  $Q(x) = x$ 의 근의 개수는 몇 개인가? 만약 중근이 있으면 한 개로 간주한다.

**풀이의 개요** 근은  $x = a$ 의 1개뿐. 직접  $Q(x) = x$ 식을 풀다보면  $x - a$ 로 양변 나눈 후 크기 비교로 해 더 없음... ◇

## KMO 2003-R1-H7

음이 아닌 정수  $n$ 에 대하여

$$f(0) = 0, \quad f(n) = f\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$$

을 만족시키는 함수  $f(n)$ 이 있다.  $0 \leq n \leq 2003$ 일 때,  $f(n)$ 의 최대값은 얼마인가? (실수  $x$ 에 대하여  $\lfloor x \rfloor$ 는  $x$ 를 넘지 않는 가장 큰 정수이다.)

**풀이의 개요**  $f(2n) = f(n)$ ,  $f(2n+1) = f(n)$  이므로  $f(n)$ 은  $n$ 을 2진법으로 썼을 때 자리수의 합을 구하는 함수이다. 2003는 2진법으로 11자리의 수이므로 자리수의 합은 11을 넘을 수 없고, 11인 것은 2047이므로 역시 불가능하고, 10인 것은 여러 개 있다. ... **답** 10 ◇

## KMO 2003-R1-H8

조건  $(a-2)^2 + b^2 \leq 4$ 와  $(x+1)^2 + y^2 \leq 1$ 를 각각 만족시키는 실수의 순서쌍  $(a, b)$ ,  $(x, y)$ 에 대하여  $ax + by$ 의 최대값을  $M$ , 최소값을  $m$ 이라 할 때  $m^2 + M^2$ 의 값은 얼마인가?

**풀이** (1)  $A = (a-2)(x+1)$ 라 하면 코시 부등식에서

$$|A|^2 \leq ((a-2)^2 + b^2)((x+1)^2 + y^2) \leq 4$$

즉  $A \geq -2$ 이므로

$$ax + by = (a-2)(x+1) - a + 2x + 2 \geq -2 - 4 - 4 + 2 = -8$$

실제로  $(a, b, x, y) = (4, 0, -2, 0)$ 일 때 등호가 성립하므로 최소값은  $-8$ 이다.

(2) 이제 최대값을 구해보자. 역시 코시 부등식에서

$$((a-2)x + by)^2 \leq ((a-2)^2 + b^2)(x^2 + y^2) \leq 4 \cdot (-2x)$$

따라서,  $(a-2)x + by \leq 2\sqrt{-2x}$ , 즉

$$ax + by \leq 2x + 2\sqrt{-2x} = -(\sqrt{-2x} - 1)^2 + 1 \leq 1$$

이다. 실제로  $(a, b, x, y) = (1, \sqrt{3}, -\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$  일 때 등호가 성립하므로 최대값은 1이다.

(1), (2)에서 답은  $m^2 + M^2 = 65$ . ◇

#### KMO 2003-R1-H9

친구 3명을 매일 한 명씩 6일 동안 초대하는데 어떤 친구도 3번 넘게(4번 이상) 초대하지 않을 경우의 수는 얼마인가? (단, 한 번도 초대하지 않은 친구가 있을 수도 있다.)

**풀이** 친구 3명을 매일 한 명씩 6일 동안 초대하는 방법은  $3^6$ 가지이다. 여기서 4번 이상 초대된 친구가 있는 경우들을 빼주면 된다. 4번 이상 초대된 친구가 2명 있을 수는 없으므로(그럼 8일 이상이어야 한다) 4번 이상 초대된 친구를 A라 하고 경우의 수를 구한 후 3배를 해주면 된다. A를 6일 동안 매일 초대한 경우는 1가지, A를 6일 중 5일을 초대한 경우는 그 5일을 택하는 방법이  $\binom{6}{5}$ 가지이고 남은 하루에 다른 2명 중 한 명을 초대하므로 모두  $2 \cdot \binom{6}{5}$ 가지이다. 비슷하게 A를 4일 초대한 경우는  $2^2 \binom{6}{4}$ 가지가 된다. 그럼 구하는 경우의 수는

$$\begin{aligned} t &= 3^6 - 3 \cdot \left\{ 1 + 2 \cdot \binom{6}{5} + 2^2 \binom{6}{4} \right\} \\ &= 729 - 3\{1 + 12 + 60\} = 510 \quad \dots \text{답} \end{aligned}$$

가지가 된다. ◇

#### KMO 2003-R1-H10

내각의 크기가 모두 같으면서 변의 길이가 각각 4, 5, 6, 7, 12, 13인 육각형에 대하여, 이 육각형을 한 변의 길이가 1인 정삼각형으로 채울 경우 모두 몇 개의 정삼각형이 필요한가?

#### KMO 2003-R1-H11

$f \circ f \circ f$ 가 항등함수인 함수  $f: \{1, 2, \dots, 10\} \rightarrow \{1, 2, \dots, 10\}$ 의 개수는 몇 개인가?

**풀이**  $f(f(f(x))) = x$  가 되는 경우는

$$x \xrightarrow{f} x \quad \text{와} \quad x \xrightarrow{f} y \xrightarrow{f} z \xrightarrow{f} x \quad (x \neq y \neq z \neq x)$$

의 두 가지 경우뿐이다. 즉, 후자의 경우처럼 서로 물고 물리는 세 원소쌍(이를 triple이라 하자)들을 모두 제외하면 남은 원소들은 전자의 경우처럼 자기 자신에 대응되어야 한다.  $n$ 개의 원소중에서 triple 하나를 만드는 경우의 수를  $a_n$ 이라 하면

$$a_n = \binom{n}{3} \cdot 2 = \frac{n(n-1)(n-2)}{3}$$

이다. 원소는 모두 10개이므로, triple은 0개, 1개, 2개, 혹은 3개일 수 있고, 각각의 경우의 수를 구해 합하면( $a_{10} = 240$ ,  $a_7 = 70$ ,  $a_4 = 8$  임으로부터)

$$1 + a_{10} + \frac{1}{2}a_{10}a_7 + \frac{1}{3!}a_{10}a_7a_4 = 1 + 240 + 8400 + 22400 = 31041 \text{개} \quad \dots \quad \text{답}$$

의  $f$ 가 가능하다. ◇

#### KMO 2003-R1-H12

어느 탁구대회에 6개의 팀이 참가하여 리그전을 벌일 예정이다. (리그전에서는 각 팀이 다른 모든 팀과 정확하게 한 번씩 시합을 한다.) 각 팀이 하루에 한 번, 한 경기장에서 동시에 경기를 하게 하여 5일을 소요할 예정일 때, 가능한 경기일정표는 모두 몇 개인가? (단, 경기일정표에는 코트를 표시하지 않는다.)

#### KMO 2003-R1-H14

주어진 원  $O$ 의 반원 위에 순서대로 놓인 서로 다른 점  $S, A_1, A_2, A_3, A_4$ 와 이 원과 만나지 않는 직선  $l$ 이 있다. 각각의 직선  $SA_1, SA_2, SA_3, SA_4$ 와  $l$ 이 만나는 점  $B_1, B_2, B_3, B_4$ 를 잡았더니  $B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4$  이 되었다.

[그림]

다음 식의 분모가 0이 아닐 때, 이 식의 값은 얼마인가?

$$\frac{SA_1 \cdot SB_1 - SA_4 \cdot SB_4}{SA_2 \cdot SB_2 - SA_3 \cdot SB_3}$$

#### KMO 2003-R1-H15

$AB : BC = 1 : \sqrt{3}$  인 직사각형  $ABCD$ 의 내부에 점  $P$ 가 있다.  $AP = 2$ ,  $BP = \sqrt{2}$ ,  $CP = 2$  일 때 직사각형  $ABCD$ 의 넓이는?



## KMO 2003-R1-H16

조건  $n^2 = m^4 + 2m^3 + 2m^2 + 2m + 2$  를 만족시키는 정수의 순서쌍  $(m, n)$ 의 집합을  $A = \{(m_i, n_i) \mid i = 1, 2, \dots, k\}$  라 할 때  $\sum_{i=1}^k (m_i^2 + n_i^2)$  의 값은 얼마인가?

**풀이** (대덕중 3학년 이태희 학생의 풀이를 수정)  $(m+1)^2 + 1 > 0$  이므로

$$\begin{aligned} n^2 &= m^4 + 2m^3 + 2m^2 + 2m + 2 \\ &> m^4 + 2m^3 + m^2 = (m^2 + m)^2 \end{aligned}$$

또,  $m = 0$  이면  $n^2 = 2$  여서 곤란하므로  $m^2 - 1 \geq 0$  이고, 그럼

$$\begin{aligned} n^2 &= m^4 + 2m^3 + 2m^2 + 2m + 2 \\ &\leq m^4 + 2m^3 + 3m^2 + 2m + 1 = (m^2 + m + 1)^2 \end{aligned}$$

또한, 이 식의 등호는  $m = \pm 1$  일 때에만 성립한다. 즉,  $m^2 > 1$  이면

$$(m^2 + m)^2 < n^2 < (m^2 + m + 1)^2$$

이 되어 해가 없다. 따라서,  $(m, n)$ 의 해는  $m = \pm 1$  일 때가 전부이고,

$$A = \{(1, 3), (1, -3), (-1, 1), (-1, -1)\}$$

이다. 따라서, 구하는 식의 값은  $\sum_{i=1}^k (m_i^2 + n_i^2) = 2(1^2 + 3^2) + 2(1^2 + 1^2) = 24$ .  $\diamond$

## KMO 2003-R1-H17

양수  $a, b, c$ 에 대하여 식

$$\frac{a}{7a+b} + \frac{b}{7b+c} + \frac{c}{7c+a}$$

이 취할 수 있는 값의 범위를 구하여라.

**풀이1** (KAIST 03학번 김린기)  $\frac{b}{a} = x, \frac{c}{b} = y, \frac{a}{c} = z$  로 치환해주면 식이 간단해진 다.  $xyz = 1, x, y, z > 0$  의 제한식에서 범위가 다음과 같음을 보이자.

$$\frac{1}{7} < \frac{1}{7+x} + \frac{1}{7+y} + \frac{1}{7+z} \leq \frac{3}{8}$$

(오른쪽 부등식) 양변에  $8(7+x)(7+y)(7+z)$ 를 곱하고 정리하면

$$\begin{aligned} &3 \cdot 8 \cdot 7^2 + 2 \cdot 8 \cdot 7(x+y+z) + 8(yz+zx+xy) \\ &\leq 3 \cdot 7^3 + 3 \cdot 7^2(x+y+z) + 3 \cdot 7(yz+zx+xy) + 3xyz (= 1) \end{aligned}$$

다시 정리하면 다음의 식과 동치가 된다.

$$144 \leq 35(x+y+z) + 13(yz+zx+xy)$$

산술-기하평균 부등식에서

$$x+y+z \geq 3\sqrt[3]{xyz} = 3, \quad yz+zx+xy \geq 3\sqrt{x^2y^2z^2} = 3$$

이므로 이로부터 위 부등식이 성립함을 확인할 수 있고, 등호는  $x=y=z(=1)$  일 때, 즉  $a=b=c$  일 때 성립한다.

(왼쪽 부등식) 일반성을 잃지 않고  $x \geq y \geq z$  라 하자. 그럼  $x \geq 1, z \leq 1$  임은 당연하다. 만일  $y \leq 1$  이면

$$\frac{1}{7+y} + \frac{1}{7+z} \geq \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$$

이므로 OK.  $y > 1$  이면  $x > 1, zx < 1$  이기도 하므로

$$\frac{1}{7+x} + \frac{1}{7+z} > \frac{1}{7+x} + \frac{x}{7x+zx} > \frac{1}{1+7x} + \frac{x}{7x+1} = \frac{1+x}{1+7x} > \frac{1}{7}$$

로 항상 부등식은 성립한다. 또한,  $x, y \rightarrow \infty$  이면  $z \rightarrow 0$  이 되고, 이 때 준식은  $\frac{1}{7}$ 로 수렴한다는 것도 알 수 있다.  $\diamond$

**풀이2** (KAIST 과학영재센터 연구원 고봉균) (오른쪽 부등식) 준식을  $A$ 라 하고,  $x = e^X, y = e^Y, z = e^Z$  로 다시 치환하자.  $xyz = 1$  이므로  $X+Y+Z=0$  이 된다. 이제

$$F(T) = \frac{1}{7+e^T}$$

라 하면 오른쪽 부등식은

$$\frac{A}{3} = \frac{F(X) + F(Y) + F(Z)}{3} \leq F\left(\frac{X+Y+Z}{3}\right) \quad (*)$$

의 Jensen 부등식 꼴이 됨을 볼 수 있다.  $F$ 를 미분하면

$$\begin{aligned} F'(T) &= \frac{-(7+e^T)'}{(7+e^T)^2} = \frac{-e^T}{(7+e^T)^2} \\ F''(T) &= \frac{(-e^T)'(7+e^T)^2 - (-e^T)[(7+e^T)^2]'}{(7+e^T)^4} = \frac{-e^T(7+e^T) + e^T \cdot 2e^T}{(7+e^T)^3} \\ &= \frac{e^T(e^T - 7)}{(7+e^T)^3} \end{aligned}$$

따라서,  $e^T < 7$  이면  $F''(T) < 0$  이고, 그 범위에서 위로 볼록한 함수이다. 즉,  $x, y, z < 7$  이면 (\*)의 Jensen 부등식에 의해 오른쪽 부등식이 성립한다. 그렇지 않은 경우라면, 일반성을 잃지 않고  $x \geq 7$  이라 하면,

$$A = \frac{1}{7+x} + \frac{1}{7+y} + \frac{1}{7+z} \leq \frac{1}{14} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{5}{14} < \frac{3}{8}$$

으로 역시 성립한다.

(왼쪽 부등식) 먼저  $x, y \rightarrow \infty$  이면  $A \rightarrow \frac{1}{7}$  임을 알 수 있다. 귀류법으로  $A \leq \frac{1}{7}$  인 경우가 있다고 가정해보자. 일반성을 잃지 않고  $z$ 가 제일 작다고 하자. 그럼  $z \leq 7^0$ .

$$\frac{1}{7+x} + \frac{1}{7+y} = A - \frac{1}{7+z} \leq \frac{1}{7} - \frac{1}{7+z} \leq \frac{1}{7} - \frac{1}{7+1} = \frac{1}{7+7^2}$$

이므로,  $x$ 도  $y$ 도  $7^2$ 보다 작아서는 안 된다. 그럼  $z = \frac{1}{xy} \leq \frac{1}{7^4}$  이어야 한다. 이 방법을 확장하자.

$$\frac{1}{7^{2^{n+1}}} < z \leq \frac{1}{7^{2^n}} \quad (**)$$

인 자연수  $n$ 이 존재한다.  $\frac{1}{7} - \frac{1}{7+\frac{1}{a}} = \frac{1}{7+7^2a}$  를 이용하면

$$\frac{1}{7+x}, \frac{1}{7+y} \leq \frac{1}{7} - \frac{1}{7+z} \leq \frac{1}{7} - \frac{1}{7+\frac{1}{7^{2^n}}} = \frac{1}{7+7^{2^{n+2}}}$$

따라서,  $x, y \geq 7^{2^{n+2}} \geq 7^{2^n}$  이어야 하고, 그럼  $z = \frac{1}{xy} \leq \frac{1}{7^{2^{n+1}}}$  이어야 한다. 이것은  $(**)$ 에 모순. 따라서, 가정  $A \leq \frac{1}{7}$  이 틀렸고, 항상  $A > \frac{1}{7}$  이다.  $\diamond$

**풀이3** (대덕중 3학년 이태희) 오른쪽 부등식만 확인하자.  $A < \frac{1}{7} + \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{3}{7}$  은 쉬우므로  $B = \frac{3}{7} - A (> 0)$  로 두자.

$$7B = 3 - 7A = \left(1 - \frac{7a}{7a+b}\right) + \dots = \frac{b}{7a+b} + \frac{c}{7b+c} + \frac{a}{7c+a}$$

이 된다. 이제  $B \geq \frac{3}{56}$  을 보이면 되겠다. Cauchy 부등식으로(분모를 이항하여 생각)

$$\begin{aligned} 7B &\geq \frac{(a+b+c)^2}{(7a+b)b + (7b+c)c + (7c+a)a} \\ &= \frac{a^2 + b^2 + c^2 + 2bc + 2ca + 2ab}{x^2 + y^2 + z^2 + 7yz + 7zx + 7xy} \\ &= \frac{3}{8} + \frac{5}{8} \cdot \frac{a^2 + b^2 + c^2 - bc - ca - ab}{a^2 + b^2 + c^2 + 7bc + 7ca + 7ab} \geq \frac{3}{8} \end{aligned}$$

따라서,  $A = \frac{3}{7} - B \leq \frac{3}{7} - \frac{3}{56} = \frac{3}{8}$  이 성립한다.  $\diamond$

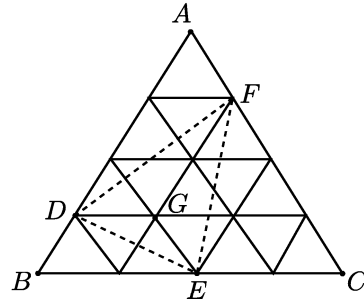
### KMO 2003-R1-H20

정삼각형  $ABC$ 의 변  $AB, BC, CA$  위에 각각 점  $D, E, F$ 를

$$DB = \frac{1}{4}AB, \quad BE = \frac{1}{2}BC, \quad CF = \frac{3}{4}CA$$

되도록 잡는다. 세 점  $A, D, F$ 를 지나는 원과 세 점  $B, D, E$ 를 지나는 원의 교점을  $G$ 라고 할 때, 점  $G$ 는  $\triangle ABC$ 의 내부에 존재한다.  $\triangle ABC$ 의 넓이가 3200일 때, 세 개의 사각형  $ADGF, DBEG, ECFG$  중에서 넓이가 가장 작은 것의 넓이를 구하여라.

**풀이** (KAIST 03학번 조원규) 정삼각형  $ABC$ 의 각 변을 4등분하고 그 등분점들을 그림과 같이 각 변에 평행하게 이어보자.



그럼 삼각형  $DEF$ 와 점  $G$ 는 그림의 위치에 있음을 쉽게 알 수 있다. 작은 정삼각형 하나의 넓이는 원래 정삼각형의  $1/16$ 이고, 세 개의 사각형  $ADGF$ ,  $DBEG$ ,  $ECFG$ 는 각각 작은 정삼각형을 5개, 3개, 8개 갖는다. 따라서, 이 중 가장 작은 사각형의 넓이는  $3 \cdot \frac{1}{16} \cdot 3200 = 600$  이다.  $\diamond$

## 2004년 한국 수학올림피아드 풀이

### 중등부

#### KMO 2004-R1-M1

자연수  $a$ ,  $k$ 에 대하여  $\{a_k\}$ 는 다음 성질을 만족시키는 정수라 정의하자.

$$\frac{a}{10^k} - \frac{1}{2} < \{a\}_k \leq \frac{a}{10^k} + \frac{1}{2}$$

$\langle a \rangle_k = 10^k \cdot \{a\}_k$  라 할 때,  $\langle \langle a \rangle_1 \rangle_2 = 2000$  을 만족시키는 자연수  $a$ 의 개수는 얼마인가?

**풀이**  $\{a\}_k$ 는  $\frac{a}{10^k}$ 을 소수 첫째 자리에서 반올림한 것이므로,  $\langle a \rangle_k$ 는  $a$ 를  $k$ 번째 자리에서 반올림한 것이다. 즉,

$$\begin{aligned} \langle \langle a \rangle_1 \rangle_2 = 2000 &\iff 1950 \leq \langle a \rangle_1 < 2050 \\ &\iff 1950 \leq \langle a \rangle_1 \leq 2040 \\ &\iff 1945 \leq a < 2045 \end{aligned}$$

이런 자연수  $a$ 는 100개.

◇

#### KMO 2004-R1-M2

10000을 연속되는 두 개 이상의 자연수의 합으로 나타낼 수 있는 경우의 수는 얼마인가?  
(단, 더하는 순서는 무시한다.)

**풀이**

$$10000 = m + (m+1) + \cdots + (m+n) \quad (m, n \geq 1)$$

으로 두자. 즉 양변에 2를 곱하면

$$(n+2m)(n+1) = 20000$$

이다.  $n+2m$ ,  $n+1$  은 홀짝이 다르고 각각 3 이상, 2 이상이다.  $20000 = 2^5 5^4$  이므로 위와 같은 두 수의 곱으로 나타내는 방법은

$$(2^5, 5^4), (2^5 5^1, 5^3), (2^5 5^2, 5^2), (2^5 5^3, 5^1)$$

의 네 가지뿐이다.

◇

## KMO 2004-R1-M3

실수  $a, b, c$ 가 임의의 실수  $x, y, z$ 에 대하여 다음 부등식을 만족시킬 때,  $3a + 2b - c$ 의 최대값은 얼마인가?

$$x^2 + 4xy + 4y^2 + axz + byz + cz^2 \geq 0$$

**풀이**  $x$ 에 대한 식으로 보고  $x$ 에 대한 내림차순으로 정리하자.

$$x^2 + (4y + az)x + (4y^2 + byz + cz^2) \geq 0$$

이 이차식이 임의의  $x$ 에 대해 항상 성립해야 하므로 판별식

$$D = (4y + az)^2 - 4(4y^2 + byz + cz^2) \leq 0$$

이어야 한다. 이번에는  $y$ 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$(8az - 4bz)y + (a^2 - 4c)z^2 \leq 0$$

$z = 0$  일 때는 당연히 성립하고,  $z \neq 0$  일 때도 임의의  $y$ 에 대해 성립해야 하므로  $8az - 4bz = 0$  이고  $a^2 - 4c \leq 0$  이어야 한다. 즉,

$$b = 2a, \quad c \geq \frac{a^2}{4}$$

그럼 문제의 식은

$$X = 3a + 2b - c \leq 7a - \frac{a^2}{4} = -\left(\frac{a}{2} - 7\right)^2 + 49 \leq 49$$

로 최대값은  $a = 14, b = 28, c = 49$  일 때 49가 된다.  $\diamond$

**관찰** (내동중 3학년 안병욱) 준식을  $(x + 2y)^2 \geq -z(ax + by + cz)$ 로 정리할 수 있고, 여기에  $z = 1, x = -3, y = -2$ 를 대입하면  $49 \geq 3a + 2a - c$ 의 부등식을 얻는다.

## KMO 2004-R1-M4

$a + b = 1$ 을 만족시키는 양수  $a, b$ 에 대하여  $\frac{1}{1+a} + \frac{a}{1+b}$ 의 최소값은 얼마인가?

**풀이** 준식을  $x$ 라 하면  $a, b$  모두 양수이므로 우선  $x > 0$ 이다.  $b = 1 - a$ 를 대입하여  $b$ 를 소거하여 통분하자.

$$x = \frac{1}{1+a} + \frac{a}{2-a} = \frac{2+a^2}{2+a-a^2}$$

분모를 이항하여  $a$ 에 대한 내림차순으로 정리하면

$$f(a) = (1+x)a^2 - xa + 2(1-x) = 0 \quad (1)$$

$a$ 에 대한 이 이차방정식이 해를 가지므로 판별식

$$D = x^2 - 4 \cdot 2(1-x) \cdot (1+x) \geq 0$$

즉,  $9x^2 \geq 8$ , 그럼  $x > 0$  이므로  $x \geq \frac{2\sqrt{2}}{3}$ . 따라서,  $x$ 의 최소값은  $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 일 것으로 기대할 수 있는데, 다만 이 때 (1)의 해가  $0 < a < 1$  범위에 있어야 진짜 원하는 최소값이 된다.  $x = \frac{2\sqrt{2}}{3}$  일 때는 판별식이 0일 때이고 (1)이 증근을 가져 완전제곱식이 될 때이다. 이 때  $a = \frac{x}{2(1+x)}$  로  $0 < a < 1$  을 틀림없이 만족함을 알 수 있다. ◇

**별해** 이차방정식 (1)의 그래프를 생각해보자. 축  $a = \frac{x}{2(1+x)}$  는  $0 < a < \frac{1}{2}$  의 범위에 있으므로  $f(0) < f(1)$  이다. 따라서, (1)이  $0 < a < 1$  에서 해를 가질 필요충분조건은 다음과 같다.

$$f(\text{축}) \leq 0, \quad f(1) > 0$$

이것을 풀면  $\frac{2\sqrt{2}}{3} \leq x < \frac{3}{2}$  이 된다. ◇

#### KMO 2004-R1-M5

일렬로 배열된 20개의 의자에 8개의 구별되지 않는 공을 얹어 놓으려고 한다. 이웃하는 공 사이에 홀수 개의 빈 의자가 있도록 얹어 놓는 방법의 수를 구하여라.

**풀이** 20개의 의자에 번갈아 흑백을 칠하자.



그럼 공은 모두 같은 색의 의자에 놓여야 한다. 또한, 검은 의자에 놓이는 경우와 흰 의자에 놓이는 경우는 대칭적이므로 경우의 수가 같다. 검은 의자에 놓이는 경우만 세어 보면, 10개의 의자 중에서 8개를 고르는 것이므로  $\binom{10}{8} = 45$ . 따라서, 모든 방법의 수는  $2 \cdot 45 = 90$ 가지이다. ◇

#### KMO 2004-R1-M6

동전을 20번 던졌을 때, 뒷면이 6번 나오고 앞면이 연속해서 5번 이상 나오지 않는 경우의 수는 얼마인가?

**풀이** 20번 중에서 뒷면이 6번 나오는 모든 경우들의 집합을  $U$ 라 하자. 그리고, 뒷면과 뒷면 사이에는 앞면이 연속하여 나오는 구간이 모두 7개 있으므로, 이들의 길이를 각각  $b_1, b_2, \dots, b_7$ 이라 하자. 예를 들어

$$\text{OXOOOXXOXXXXOXOXXOX} \implies (b_1, b_2, \dots, b_7) = (1, 4, 0, 5, 3, 1, 0)$$

와 같이 대응시키는 것이다.  $U$ 에서  $b_i \geq 5$  인 경우들의 집합을  $A_i$ 라 하자( $i = 1, 2, \dots, 7$ ). 그럼 우리가 구하는 것은 다음과 같다(포함과 배제의 원리).

$$\begin{aligned} |X| &= |U - (A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_7)| \\ &= |U| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| - \sum |A_i \cap A_j \cap A_k| + \dots \end{aligned}$$

먼저  $|U|$ 를 구해보자. 이것은 20번의 시기 중에서 뒷면이 되는 6번을 고르는 경우의 수이므로  $|U| = \binom{20}{6}$  이다. 다음으로  $|A_i|$ , 즉  $b_i \geq 5$  인 경우의 수를 구해보자. 이것은 5번의 동전시기를 먼저 제외해놓고 뒷면의 위치를 정한 후  $b_i$ 의 자리에 앞면 5번을 추가로 끼워넣는 것과 같으므로, 그 경우의 수는  $|A_i| = \binom{15}{6}$  이다. 비슷하게,  $|A_i \cap A_j| = \binom{10}{6}$  이고,  $|A_i \cap A_j \cap A_k| = \binom{5}{6} = 0$  으로 이후는 더 계산할 필요가 없다. 따라서,

$$\begin{aligned} |X| &= |U| - \sum |A_i| + \sum |A_i \cap A_j| - 0 \\ &= \binom{20}{6} - \binom{7}{1} \binom{15}{6} + \binom{7}{2} \binom{10}{6} \end{aligned}$$

로, 이것을 계산하면 답은 8135이다.  $\diamond$

#### KMO 2004-R1-M7

$\angle A = 72^\circ$  인 삼각형  $ABC$ 의 내부의 점  $M$ 에 대하여  $\angle BMC = 148^\circ$  이다. 점  $M$ 에서 세 변  $BC, CA, AB$ 에 내린 수선의 발을 각각  $D, E, F$ 라 할 때,  $\angle FDE$ 의 크기는 얼마인가?

**풀이** 사각형  $FBDM$ 과  $ECDM$ 은 대각의 합의  $180^\circ$ 이므로 원에 내접하는 사각형들이다. 따라서,

$$\begin{aligned} \angle FDE &= \angle FDM + \angle EDM \\ &= \angle FBM + \angle ECM \\ &= (\angle ABC - \angle MBC) + (\angle ACB - \angle MCB) \\ &= (\angle ABC + \angle ACB) - (\angle MBC + \angle MCB) \\ &= (180^\circ - \angle A) - (180^\circ - \angle BMC) \end{aligned}$$

이 되고, 이것을 계산하면  $\angle FDE = (180^\circ - 72^\circ) - (180^\circ - 148^\circ) = 76^\circ$  이다.  $\diamond$



## KMO 2004-R1-M8

어떤 볼록다면체의 각 면이 삼각형, 사각형, 오각형, 또는 육각형이라 하자. 이 다면체에 삼각형 면이 두 개, 사각형 면이 한 개 있을 때, 다음 중 옳은 것은 어느 것인가?

- (1) 오각형 면은 세 개, 육각형 면은 두 개 있을 수 있다.
- (2) 오각형 면은 두 개, 육각형 면은 세 개 있을 수 있다.
- (3) 오각형 면은 네 개, 육각형 면은 한 개 있을 수 있다.
- (4) 오각형 면은 두 개, 육각형 면은 두 개 있을 수 있다.
- (5) 오각형 면은 한 개, 육각형 면은 네 개 있을 수 있다.

**풀이** 다면체의 꼭지점, 모서리, 면의 개수를 각각  $v$ ,  $e$ ,  $f$ 라 하자. 그럼 다음의 사실들이 성립한다.

- (a)  $v - e + f = 2$  (오일러의 공식)
- (b)  $b := \sum (\text{각 면의 모서리의 개수}) = 2e$
- (c)  $\sum (\text{각 꼭지점에 연결된 모서리의 개수}) = 2e$

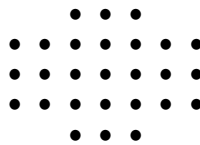
특히 (c)에서, 각 꼭지점에는 최소 3개의 모서리가 연결되어 있어야 하므로  $2e \geq 3v$ 의 부등식이 성립한다. 보기 (1)–(5)의 값들을 모두 표로 나타내어보면 다음과 같다.

|     | $n_3$ | $n_4$ | $n_5$ | $n_6$ | $f$ | $b$ | $e = b/2$ | $v = e - f + 2$ | $2e \geq 3v$ |
|-----|-------|-------|-------|-------|-----|-----|-----------|-----------------|--------------|
| (1) | 2     | 1     | 3     | 2     | 8   | 37  | $37/2$    |                 |              |
| (2) | 2     | 1     | 2     | 3     | 8   | 38  | 19        | 13              | 땡            |
| (3) | 2     | 1     | 4     | 1     | 8   | 36  | 18        | 12              | 성립           |
| (4) | 2     | 1     | 2     | 2     | 7   | 32  | 16        | 11              | 땡            |
| (5) | 2     | 1     | 1     | 4     | 8   | 39  | $39/2$    |                 |              |

따라서, 가능한 경우는 (3)뿐이다. 실제로, 정육면체의 한 면에서 마주보는 두 꼭지점을 조금 잘라내면 (3)의 조건을 만족하는 다면체가 됨을 확인할 수 있다. ◇

## KMO 2004-R1-M9

다음 그림과 같이 가로와 세로의 간격이 1이 되도록 점들이 배열되어 있을 때, 이 중의 세 점을 꼭지점으로 하는 삼각형의 개수는 얼마인가?



**풀이** 주어진 27개의 점에서 세 점을 고르는 경우 중에서 세 점이 일직선을 이루는(삼각형의 세 꼭지점이 되지 않는) 경우들을 빼어주자. 일직선을 이루는 세 점의 기울어진 방향은 우선 가로나 세로 방향인 경우가 있고,  $(1, 1)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(3, 1)$ ,  $(1, 2)$  의 경우와 이들의 좌우대칭인 경우들이 있다.

(1) 가로 방향: 맨 윗줄과 아랫줄에서  $2 \cdot \binom{3}{3} = 2$ 가지, 나머지 줄에서  $3 \cdot \binom{7}{3} = 105$ 가지, 그래서 모두 107가지.

(2) 세로 방향:  $4 \cdot \binom{3}{3} + 3 \cdot \binom{5}{3} = 34$ 가지.

(3)  $(1, 1)$  방향:  $3 \cdot \binom{3}{3} + 4 \cdot \binom{4}{3} = 19$ 가지.

(4)  $(2, 1)$  방향: 5가지.

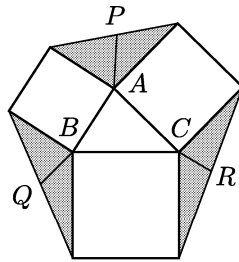
(5)  $(3, 1)$  방향: 1가지.

(6)  $(1, 2)$  방향: 1가지.

(3)–(6)은 그 좌우대칭의 경우도 생각해야 하므로, 구하는 삼각형의 개수는  $\binom{27}{3} - (107 + 34 + 2 \cdot (19 + 5 + 1 + 1)) = 2925 - 193 = 2732$ 개. ◇

#### KMO 2004-R1-M10

다음 그림과 같이 세 변의 길이가 각각 5, 6, 7인 삼각형  $ABC$ 의 외부에 세 개의 정사각형을 그리면 세 개의 빗금친 삼각형을 얻는다. 그림에서 세 선분  $AP$ ,  $BQ$ ,  $CR$ 은 각각 빗금친 삼각형의 중선이다. 이 세 중선의 길이의 합은 얼마인가?



**풀이**  $Q$ 가 지나는 선분의 양끝점을  $D$ ,  $G$ 라 하자.  $\triangle BQG$ 를  $Q$ 에 대해 대칭시킨 것을  $\triangle EQD$ 라 하자. 그럼 도형  $DEQB$ 는 삼각형이 되고,  $DB = AB$ ,  $DE(= BG) = BC$ ,

$$\begin{aligned} \angle EDB &= \angle EDQ + \angle BDQ = \angle BGQ + \angle BDQ \\ &= 180^\circ - \angle DBG = \angle B \end{aligned}$$

이므로  $\triangle BDE \equiv \triangle ABC$  (SAS합동)가 된다. 따라서,

$$BQ = \frac{1}{2}BE = \frac{1}{2}AC$$

마찬가지로,  $AP = \frac{1}{2}BC$ ,  $CR = \frac{1}{2}AB$  이고, 세 중선의 합은

$$AP + BQ + CR = \frac{1}{2}(BC + CA + AB) = \frac{1}{2}(7 + 6 + 5) = 9$$

이다. ◇

**별해**  $\triangle DBG$ 를,  $DB$ 가  $AB$ 에 일치하도록,  $B$ 를 중심으로  $90^\circ$  회전하자. 그럼  $D'$ ,  $B$ ,  $C$ 는 일직선을 이루고,  $BQ'$ 은 중점연결선으로  $AC$ 의 길이의  $\frac{1}{2}$ 임을 알 수 있다. ◇

#### KMO 2004-R1-M11

$1 \leq n \leq 100$  인 자연수  $n$ 에 대하여  $(n-1)!$ 이  $n$ 으로 나누어 떨어지는 자연수  $n$ 의 개수를 구하여라. (단,  $0! = 1$ ,  $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots n$  이다.)

**풀이**  $n$ 이 소수이면 당연히 성립하지 않는다. 따라서  $n$ 이 소수가 아닌 경우만 살펴 보자.

(1)  $n = a \cdot b$  (단,  $1 < a < b$ ) 가 되면,  $a < b \leq n-1$  이므로  $ab \mid (n-1)!$  이다. 즉, 이 경우 항상 문제가 만족된다.

(2) (1)이 아닌 경우는  $n = p^2$ 꼴( $p$ 는 소수)인 경우이다.  $p = 2$  일 때는  $n = 4$  이고  $4$ 는  $3! = 6$  을 나누지 못한다. 한편  $p \geq 3$  이면  $p < 2p \leq p^2 - 1 (= n-1)$  로부터  $2p^2 \mid (n-1)!$ , 즉  $n \mid (n-1)!$  이 성립하므로 문제를 만족한다.

따라서, 소수와 4를 제외한 모든 경우이므로,  $1 \leq n \leq 100$  에서 이를 세면 74가지이다.

◇

#### KMO 2004-R1-M12

1보다 큰 정수  $a, b$ 가  $a^{9a} = b^{2b}$  를 만족시킬 때,  $2a + b$  의 최소값을 구하여라.

**풀이** 좌변과 우변 모두  $a$ 나  $b$ 에 따라 증가하고,  $2a + b$ 도 역시 증가함수이다.  $(a, b) = (9, 27)$  이면

$$a^{9a} = 9^{9 \cdot 9} = 3^{162}, \quad b^{2b} = 27^{2 \cdot 27} = 3^{162}$$

으로 성립하고,  $a < 9$  인 경우들은 각각 확인하면 만족하는  $b$ 가 없다. 따라서, 이 때가 최소이고  $2a + b$  의 최소값은  $2 \cdot 9 + 27 = 45$  이다. ◇

#### KMO 2004-R1-M13

다음 방정식을 만족시키는 자연수  $m, n$ 이 무수히 많을 때, 정수  $a$ 의 값을 구하여라.

$$\frac{m^2 - n^2 - 6n - 14}{m + n + 2} = a$$

**풀이** 분모를 이항하여 정리하면

$$\begin{aligned} m^2 - am - n^2 - (a+6)n - 2a - 14 &= 0 \\ \Leftrightarrow \left(m - \frac{a}{2}\right)^2 - \left(n + \frac{a+6}{2}\right)^2 &= 5 - a \end{aligned}$$

$A = 2(m - \frac{a}{2})$ ,  $B = 2(n + 3 + \frac{a}{2})$  로 치환하면, 위 식은

$$(A+B)(A-B) = 4(5-a)$$

가 된다.  $A, B$ , 그리고 우변이 모두 정수이므로, 우변이 0이 아니면 우변을 두 인수의 곱으로 나타내는 경우를 따지는 방법으로 이 부정방정식을 풀 수 있고, 그럼 이 식을 만족하는 해가 유한 개 밖에 없게 된다. 따라서, 해가 무한히 많기 위해서는  $a = 5$  이다. (그리고 이 때  $A = B$  이면 되므로 이를 만족하는 해는 실제로 무한히 많다.) ◇

#### KMO 2004-R1-M14

다음 수에 가장 가까운 정수를 구하여라.

$$\sqrt{13} + \sqrt{15} + \sqrt{17} + \sqrt{19} + \sqrt{21} + \sqrt{23}$$

**풀이**  $f(a) = \sqrt{18-a} + \sqrt{18+a}$  라 하자 ( $1 \leq a \leq 5$ ).

$$f(a)^2 = 2 \cdot 18 + 2\sqrt{18^2 - a^2} < 2 \cdot 18 + 2 \cdot 18 = 72$$

$$f(a)^2 \geq 2 \cdot 18 + 2\sqrt{18^2 - 5^2} > 2 \cdot 18 + 2 \cdot 17 = 70$$

즉,

$$f(1) + f(3) + f(5) < 3 \cdot \sqrt{72} = \sqrt{648} < 25.5 = \sqrt{650.25}$$

$$f(1) + f(3) + f(5) > 3 \cdot \sqrt{70} = \sqrt{630} > 25 = \sqrt{625}$$

이므로, 가장 가까운 정수는 25이다. ◇

#### KMO 2004-R1-M15

방정식  $[x] + \frac{2004}{[x]} = x^2 + \frac{2004}{x^2}$  의 1이 아닌 해를  $a$ 라 할 때,  $a^2$ 의 값을 구하여라. (단,  $[x]$ 는  $x$ 를 넘지 않는 가장 큰 정수이다.)

**풀이** 우변이 양수이므로 좌변도 양수, 즉  $[x] > 0$  이라야 하고, 또 1이 아닌 해라 했으므로,  $a > 1$  이다. 이 때,  $a^2 - [a] \geq a^2 - a > 0$  이므로

$$\begin{aligned} [a] + \frac{2004}{[a]} = a^2 + \frac{2004}{a^2} &\iff \frac{2004}{[a]} - \frac{2004}{a^2} = a^2 - [a] \\ &\iff 2004 \cdot \frac{a^2 - [a]}{[a]a^2} = a^2 - [a] \\ &\iff a^2[a] = 2004 \end{aligned}$$

$a = \sqrt{167}$  일 때 이 식이 성립하고, 좌변은  $a$ 가 증가함에 따라 단조증가하므로 해는 이것 하나뿐이다. 따라서,  $a^2 = 167$ .  $\diamond$

#### KMO 2004-R1-M16

다음을 만족시키는 함수  $f(x)$ 에 대하여,  $f(-9)$ 의 값을 기약분수  $\frac{n}{m}$ 으로 나타낼 때,  $10m+n$ 의 값을 구하여라.

$$f(3) = 1, \quad (x^2 - x + 1)f(x^2) = f(x)$$

**풀이**  $x = 3$  을 대입하면  $f(9) = \frac{1}{7}f(3) = \frac{1}{7}$ .

$x = 9$  를 대입하면  $f(81) = \frac{1}{73}f(9) = \frac{1}{73 \cdot 7}$ .

$x = -9$  를 대입하면  $f(-9) = 91f(81) = \frac{13}{73}$ .

따라서,  $10m + n = 743$ .  $\diamond$

#### KMO 2004-R1-M17

다음 두 조건을 만족시키는 자연수  $n$ 의 개수를 구하여라.

(가)  $n$ 은 20보다 큰 소수로 나누어 떨어지지 않는다.

(나)  $n$ 은 어떤 소수의 제곱으로도 나누어 떨어지지 않는다.

**풀이** (가)에 의해  $n$ 의 소인수가 될 수 있는 것은 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19뿐이고, (나)에 의해 이들 각각의 지수는 2 이상이 될 수 없다. 즉,

$$n = 2^{e_1} 3^{e_2} \cdots 19^{e_8}, \quad e_1, e_2, \dots, e_8 \in \{0, 1\}$$

풀이다. 각각의  $e_i$ 가 0 혹은 1의 2가지가 가능하므로, 이런  $n$ 의 개수는  $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^8 = 256$ 개이다.  $\diamond$

## KMO 2004-R1-M18

원탁에 둘러 앉아있는 12명 중에서 4명의 위원을 뽑으려고 한다. 인접하여 앉아있는 사람은 선출될 수는 없다고 할 때, 위원을 뽑는 방법의 수를 구하여라.

**풀이** 위원으로 선출된 네 사람을 앉아있는 차례로  $b_1, b_2, b_3, b_4$  라 하고, 인접한 두 선출위원 사이의 간격을 차례로  $c_1 + 1, c_2 + 1, c_3 + 1, c_4 + 1$  라 하자. 그럼

$$c_1 + c_2 + c_3 + c_4 = 12 - 4 = 8, \quad c_1, c_2, c_3, c_4 \geq 1$$

이 된다. 이 식의 정수해의 개수는

$$O O O | O | O O | O O \longrightarrow (c_1, c_2, c_3, c_4) = (3, 1, 2, 2)$$

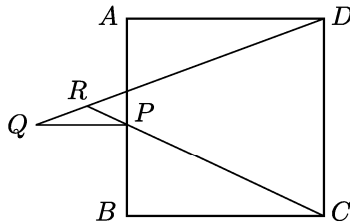
위와 같이 8개의 공 사이의 7곳 중 3곳을 택해 칸막이를 두는 경우의 수와 같으므로

$$\binom{7}{3} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 35 \text{개}$$

가 된다. 여기서 12명의 위원 중  $b_1$ 을 택하는 방법이 12가지이고,  $b_1, b_2, b_3, b_4$ 의 순서가 서로 돌아가는 4가지는 서로 같은 경우이므로, 구하는 경우의 수는  $\frac{1}{4} \times 12 \times \binom{7}{3} = 105$ 가지이다.  $\diamond$

## KMO 2004-R1-M19

한 변의 길이가 13인 정사각형  $ABCD$ 에서  $BP = 6$  인 점  $P$ 를 변  $AB$  위에 잡는다. 점  $P$ 에서 변  $BC$ 에 평행한 직선을 긋고 이 직선 위에  $QP = 6$  이 되도록 점  $Q$ 를 사각형  $ABCD$ 의 외부에 잡는다. 직선  $QD$ 와 직선  $PC$ 의 교점을  $R$ 이라 할 때 삼각형  $PQR$ 의 외접원의 반지름의 길이의 제곱은 얼마인가?



**풀이**  $RB$ 와  $PQ$ 의 교점을  $T$ 라 하고,  $QD$ 와  $AB$ 의 교점을  $S$ 라 하면,

$$\triangle RCD \sim \triangle RPS \quad \triangle RPT \sim \triangle RCB$$

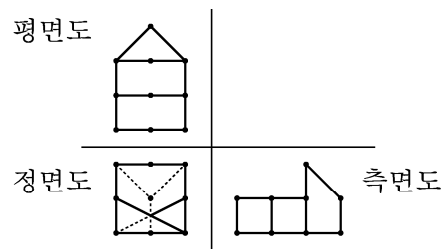
이다. 닮음비가  $RP : RC$  로 서로 같고  $BC = CD$  이므로,  $TP = PS$ . 따라서,

$$\triangle SQP \equiv \triangle TBP$$

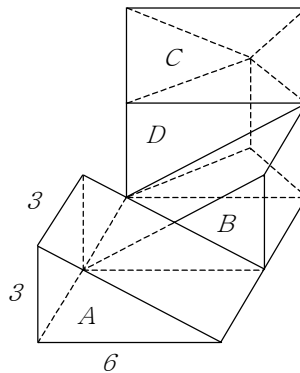
그럼  $\angle RQP = \angle RBP$  이고, 따라서  $\square RQBP$ 는 원에 내접하는 사각형이다. 즉,  $\triangle PQR$ 의 외접원은  $\triangle PQB$ 의 외접원과 같고, 외심은 선분  $QB$ 의 중점, 반지름은  $\frac{1}{2}QB = 3\sqrt{2}$ 이다. 따라서, 반지름의 길이의 제곱은 18.  $\diamond$

### KMO 2004-R1-M20

평면도, 정면도, 우측면도가 다음과 같은 입체의 부피를 구하여라. (단, 굵게 표시된 점들의 가로와 세로의 간격은 3이고, 점선은 가려서 보이지 않는 모서리를 나타낸다.)



**풀이** 아래와 같은 입체도형이다.



$A, B, C, D$ 부분의 부피를 구하면 각각 27, 27, 18, 27이 된다. 따라서, 이 입체도형의 부피는  $A + B + C + D = 99$ .  $\diamond$

## 고등부

### KMO 2004-R1-H2

$p^4 - 5p^2 + 9$ 가 소수가 되는 소수  $p$ 의 개수는 얼마인가?

**풀이**  $p > 5$  인 경우 소수들은  $5k \pm 1, 5k \pm 2$  꼴이고, 그럼 언제나

$$p^4 - 5p^2 + 9 = (p^2 - 1)(p^2 - 4) + 5 = (p + 2)(p + 1)(p - 1)(p - 2) + 5$$

로 5의 배수가 된다. 이것은 5보다 크므로 합성수이다. 따라서,  $p \leq 5$  인 2, 3, 5만 생각하면 되고, 이 중 준식을 소수가 되게 하는 것은 2, 5의 두 개뿐이다. ◇

**주** 페르마의 작은 정리를 안다면  $5 \nmid p$  일 때  $p^4 \equiv 1 \pmod{5}$  를 이용해도 되겠다.

#### KMO 2004-R1-H3

자연수  $m, n$ 이 식  $2m^2 + 2n^2 = 137(m - n)$  을 만족시킬 때,  $m + n$ 의 값은 얼마인가?

**풀이** 좌변이 짝수이므로 우변도 짝수. 즉,  $m$ 과  $n$ 은 홀짝이 같다. 그럼  $m^2$ 과  $n^2$ 도 홀짝이 같으므로 좌변은 다시 4의 배수이고, 따라서 우변의  $m - n$ 도 4의 배수.  $m = n + 4k$  (4는 자연수) 를 준식에 대입하면

$$(n + 4k)^2 + n^2 = 137 \cdot 2k$$

$$(n + 2k)^2 = k(137 - 4k)$$

로 정리된다. 좌변이 양수이므로 우변도 양수, 따라서  $0 < 4k < 137$ . 그럼  $\gcd(k, 137 - 4k) = \gcd(k, 137)$  은 137일 수 없으므로 1일 수밖에 없다. 서로 소인 두 수의 곱이 완전제곱수이므로 둘다 각각 완전제곱수  $k = a^2, 137 - 4k = b^2$  꼴이어야 한다.

$$4a^2 + b^2 = 137$$

을 만족하는 경우는  $(a^2, b^2) = (2^2, 11^2)$  뿐이다. 따라서,  $k = 4, n = 14, m = 30$  이 되고,  $m + n = 44$ . ◇

#### KMO 2004-R1-H4

다음 식을 만족시키는  $a, b$ 에 대하여  $\sin^2(a + b)$ 의 값을 기약분수  $\frac{n}{m}$ 으로 나타낼 때,  $10m + n$ 의 값을 구하여라.

$$\sin a + \sin b = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos a + \cos b = \frac{\sqrt{6}}{2}$$



**풀이** 삼각함수의 합차공식에서

$$\begin{aligned}\sin a + \sin b &= 2 \sin \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \cos a + \cos b &= 2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2}\end{aligned}$$

따라서,  $\tan \frac{a+b}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$  이 된다.  $t = \tan \frac{x}{2}$  라 할 때  $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$  이 되는 공식을 이용하면

$$\sin(a+b) = \frac{2/\sqrt{3}}{1+(1/3)} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

따라서,  $\sin^2(a+b) = \frac{3}{4}$  이고,  $10m+n=43$ .

◇

#### KMO 2004-R1-H5

부등식  $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq c$  를 만족시키는 모든 실수  $a, b$  (단,  $0 \leq a, b, \leq 1$ ) 에 대하여, 다음 연립방정식이 실수 해를 갖도록 하는 실수  $c$ 의 최대값은 얼마인가?

$$\begin{cases} a = (1-x)y \\ b = (1-y)x \end{cases}$$

**풀이**  $a-b=y-x$ , 즉  $y=x+a-b$  이고, 이것을 첫 번째 식에 대입하면

$$(x-1)(x+a-b)+a=0$$

$$x^2+(a-b-1)x+b=0$$

이 이차식이 근을 가져야 하므로 판별식

$$D=(a-b-1)^2-4b \geq 0$$

이어야 한다.  $0 \leq a, b, \leq 1$  이므로  $b \geq 0$ ,  $a-b-1 \leq 0$  이고, 따라서 동치변형하면

$$D \geq 0 \iff |a-b-1| \geq 2\sqrt{b}$$

$$\iff -a+b+1 \geq 2\sqrt{b}$$

$$\iff (\sqrt{b}-1)^2 \geq a$$

$$\iff 1-\sqrt{b} \geq \sqrt{a}$$

$$\iff \sqrt{a} + \sqrt{b} \leq 1$$

이 된다. 실제로  $\sqrt{a} + \sqrt{b} = 1$  일 때,  $D=0$  이고,

$$x = \frac{-a+b+1}{2}, \quad y = \frac{a-b+1}{2}$$

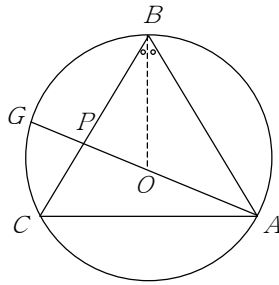
혹은  $x = \sqrt{b}$ ,  $y = \sqrt{a}$  가 연립방정식의 해가 된다. 따라서,  $c$ 의 최대값은 1.

◇

## KMO 2004-R1-H6

$AB = BC$  인 예각 이등변삼각형  $ABC$ 의 외접원의 반지름의 길이가 3이다. 점  $A$ 와 외접원의 중심  $O$ 를 잇는 직선과 변  $BC$ 와의 교점  $P$ 에 대하여  $AP = \frac{21}{4}$  일 때, 선분  $AB$ 의 길이의 제곱은 얼마인가?

**풀이**  $AP$ 의 연장선이 원과 만나는 점을  $G$ 라 하자.



그럼

$$BP \cdot PC = AP \cdot PG = \frac{21}{4} \cdot \frac{3}{4} = \frac{63}{16}$$

한편, 각의 이등분선 정리에 의해

$$AB : BP = AO : OP = 3 : \frac{21}{4} - 3 = 4 : 3$$

따라서,

$$BP \cdot PC = \frac{3}{4}AB \cdot \frac{1}{4}AB = \frac{3}{16}AB^2$$

이 되고, 그럼  $AB^2 = 21$ .

◇

## KMO 2004-R1-H7

회원이 7명인 어느 동아리의 구성원을 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7로 나타내기로 하자. 이 동아리에는 3명씩으로 구성된 네 개의 위원회  $A = \{1, 2, 3\}$ ,  $B = \{2, 3, 4\}$ ,  $C = \{3, 4, 5\}$ ,  $D = \{1, 2, 4\}$ 가 있다. 각 위원회에 한 명씩을 추가하여 4명으로 구성할 때, 새로 구성된 어느 두 위원회의 구성원도 완전히 일치하지는 않도록 추가하는 방법의 수는 얼마인가? (단, 같은 사람을 두 개 이상의 위원회에 추가할 수도 있다.)

**풀이** 단순한 막노동일 뿐이므로 과정은 생략. 예를 들어  $A$ 에 4가 추가될 때, 5가 추가될 때, 6이 추가될 때, 7이 추가될 때 등으로 경우를 나누어서 푼다면, 각각 33, 56, 56, 56가지가 나온다. 답은  $33 + 56 + 56 + 56 = 201$ 가지.

◇

## KMO 2004-R1-H8

1, 2, 3, 4를 사용하여 만든 9자리의 자연수 중에서 다음 조건을 만족시키는 것의 수는 얼마인가?

- (가) 최고 자리 수는 1이다.  
 (나) 같은 숫자가 연속하여 나타나지 않는다.  
 (다) 일의 자리 수는 1이 아니다.

**풀이** 위와 같은 성질을 갖는  $n$ 자리 자연수의 개수를  $a_n$  ( $n \geq 2$ ) 이라 하자. (가)와 (나)를 만족시키는  $n$ 자리 자연수는 최고 자리 다음부터 그 앞자리와 다른 숫자를 고르면 되므로  $3^{n-1}$ 개가 있다. 이 중에서 (다)를 만족하지 않는 것, 즉 마지막 자리수가 1인 것만 빼주면 된다. 마지막 자리수가 1인 것은 그 앞자리가 1이 아닌 것의 개수만큼 있다. 그리고 이것은  $a_{n-1}$ 가지가 된다.

$$a_n = 3^{n-1} - a_{n-1} \quad (n \geq 3)$$

이제  $a_9$ 를 구하면, 점화식을 반복적으로 풀어

$$\begin{aligned} a_9 &= 3^8 - 3^7 + 3^6 - 3^5 + 3^4 - 3^3 + 3^2 - a_2 \\ &= 3^8 - 3^7 + 3^6 - 3^5 + 3^4 - 3^3 + 3^2 - 3 \end{aligned}$$

이 된다. 이것을 계산하면 4920.

◇

## KMO 2004-R1-H9

다음 조건을 만족시키는 자연수  $m$ 의 최소값은 얼마인가?

모든 사람이 각각  $m$ 명 이상을 알고 있는 30명의 사람 중에는 모두 서로 아는 4명의 그룹이 항상 있다. (단, A가 B를 알면 B도 A를 알고 있다.)

**풀이** 최소값은 21명이다. 우선 21명일 때 조건이 성립함을 보이자. 30명의 사람들을  $a_1, \dots, a_{30}$ 이라 하고,  $a_1$ 과  $a_2$ 가 알고있다고 하자.  $a_1$ 과  $a_2$ 는 각각 20명의 사람들을 더 알고있어야 하므로, 적어도

$$20 + 20 - (30 - 2) = 12$$

명은  $a_1$ 과  $a_2$ 가 동시에 알고있다. 이 중 한 명을  $a_3$ 이라 하면,  $a_1$ 과  $a_2$ 는  $a_3$  이외에 적어도 11명을 함께 알고있고,  $a_3$ 은  $a_1$ 과  $a_2$  이외에 19명을 더 알고있다. 이 두 인원의 합

30명이  $a_1, a_2, a_3$ 을 제외한 인원 27명을 넘으므로,  $a_1, a_2, a_3$ 이 함께 아는 사람이 또 (적어도 3명) 있다. 그 중 한 명을  $a_4$ 라 하면  $a_1, a_2, a_3, a_4$ 가 조건을 만족하는 4명의 그룹이다.

20명 이하일 때는 조건이 성립하지 않을 수 있다. 30명을 10명씩 3개의 집단  $X_1, X_2, X_3$ 으로 나누고, 같은 집단의 2명은 서로 모두 모르고 다른 집단의 2명은 서로 모두 아는 것으로 하자. 임의로 4명을 택하면 이 중에 같은 집단에 속하는 2명이 있고 그 둘은 서로 모른다. 따라서, 이 경우 조건이 성립하지 않음을 알 수 있다. ◇

**별해** 전체 인원을 30명 대신  $n$ 명으로, 모두가 서로 아는 그룹의 인원 4명을  $k$ 명으로 일반화하자. 그리고, 조건을 만족하는 최소의  $m$ 을  $m(n, k)$ 라 하자.

$m$ 명일 때 조건이 성립한다고 해보자. 한 명  $A$ 가 아는 인원은  $m(n)$ 명. 서로 아는 두 명  $A, B$ 가 동시에 아는 인원은

$$|X_A \cap X_B| = |X_A| + |X_B| - |X_A \cup X_B| \geq 2m - n(\text{명})$$

이상이다. 비슷하게, 서로 아는 세 명  $A, B, C$ 가 동시에 아는 인원은

$$|X_A \cap X_B \cap X_C| = |X_A \cap X_B| + |X_C| - |(X_A \cap X_B) \cup X_C| \geq 3m - 2n(\text{명})$$

이상임을 알 수 있다. 일반적으로  $k-1$ 명이 동시에 아는 인원은  $(k-1)m - (k-2)n$ 명 이상임을 말할 수 있다. 따라서,  $(k-1)m - (k-1)n > 0$  이면, 즉

$$m \geq \left\lfloor \frac{k-2}{k-1}n \right\rfloor + 1$$

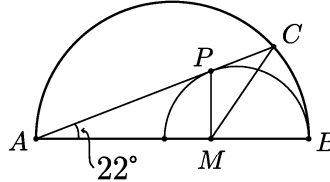
이면, 모두 서로 아는  $k$ 명의 그룹이 항상 있다.

이 값이  $m(n, k)$ 임을 보이자. 전체 인원을 최대한 균등하게  $k-1$ 개의 집단으로 나누자. 그리고, 같은 집단에 속하는 사람끼리는 항상 서로 모르고 다른 집단에 속하는 사람끼리는 항상 서로 아는 것으로 하자. 그럼  $k$ 명을 뽑으면 그 중에 같은 집단에 속하는 2명이 있어,  $k$ 명이 모두 서로 알 수는 없게 된다. 한 사람이 아는 인원은 전체에서 자기 집단의 인원을 빼면 되므로, 최소

$$n - \left\lceil \frac{n}{k-1} \right\rceil = n + \left\lfloor -\frac{n}{k-1} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{k-2}{k-1}n \right\rfloor$$

로, 이 경우 원하던  $m(n, k) - 1$ 의 값과 같음을 확인할 수 있다. ◇

지름이  $AB$ 인 원에서  $\angle CAB = 22^\circ$  인 현  $AC$ 를 긋자. 주어진 원에 점  $B$ 에서 내접하고, 현  $AC$ 에도 접하는 작은 원을 그린다. 작은 원과 직선  $AC$ 의 접점  $P$ 에서 선분  $AB$ 에 그은 수선의 발을  $M$ 이라 할 때,  $\angle CMB$ 의 크기는 얼마인가?



**풀이**  $BQ$ 를 작은 원의 지름이라 하자. 접선과 현이 이루는 각은 원주각과 같으므로

$$x = \angle APQ = \angle QBP = \angle QPM$$

따라서,  $x = \frac{1}{2}\angle APM = \frac{1}{2}(90^\circ - 22^\circ) = 34^\circ$  이다.  $\angle PMB + \angle PCB = 180^\circ$  로  $\square PMBC$ 가 원에 내접하는 사각형이므로,

$$\angle CMB = \angle CPB = 90^\circ - x = 56^\circ$$

◇

#### KMO 2004-R1-H11

음이 아닌 정수  $n$ 에 대하여  $f(n) = 2004^n$  이라 하자.  $f(0), f^2(0), f^3(0), \dots$  을 11로 나눈 나머지로 이루어진 집합을  $S$ 라 하자. 이 때, 집합  $S$ 의 모든 원소의 합을 구하여라. (단,  $f^k$ 는  $f$ 를  $k$ 번 합성한 함수이다.)

**풀이**  $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$  이고  $2004^{2a} \equiv 4^{2a} \equiv 6 \pmod{10}$  이므로,

$$f(0) = 1 \equiv 1 \pmod{11}$$

$$f^2(0) = 2004 \equiv 2 \pmod{11}$$

$$f^3(0) = 2004^{2004} \equiv 2^{2004} \equiv 2^4 \equiv 5 \pmod{11}$$

$$f^{r(\geq 4)}(0) = 2004^{2004^{2a}} \equiv 2^{2004^{2a}} \equiv 2^6 \equiv 9 \pmod{11}$$

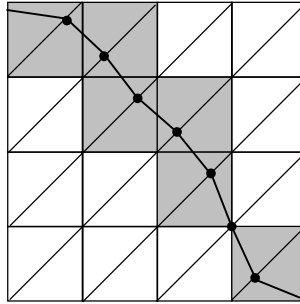
따라서,  $S = \{1, 2, 5, 9\}$  이고, 답은  $1 + 2 + 5 + 9 = 17$ .

◇

#### KMO 2004-R1-H12

내접하는 원이 그려져 있는 정사각형의 가로와 세로를 각각 50등분하여 2500개의 작은 정사각형으로 나누었다. 원주의 일부가 그려져 있는 작은 정사각형의 개수를 구하여라.

**풀이** 대칭적이므로 4분원 하나만 생각해보자. 다음 그림처럼 증가하는 격자대각선들을 모두 그리면 감소하는 곡선(원호)과는 항상 한 점에서 만나고,



곡선이 내부를 지나는 작은 정사각형마다 내부에 이런 교점이 꼭 하나씩 생기며, 그 외의 교점은 격자점에서 만날 때 생기는 것들이다.  $25 \times 25$ 에서 격자대각선은 모두  $25 + 25 - 1 = 49$ 개이므로, 곡선이 지나는 격자점의 수를  $a$ 라 하면 곡선이 내부를 지나는 작은 정사각형의 개수는  $4(49 - a)$ 개가 된다. 이제  $a$ 를 구해보자.  $x^2 + y^2 = 25^2$  을 만족하는 양의 정수해는  $(7, 24), (15, 20), (20, 15), (24, 7)$ 의 4개뿐이다. 따라서, 구하는 개수는  $4(49 - 4) = 180$ 개. ◇

**KMO 2004-R1-H13**

양수  $a, b$ 에 대하여 식  $a^2 + b + \frac{9}{a+b+1}$  의 최소값을 기약분수  $\frac{n}{m}$ 으로 나타낼 때,  $10m+n$ 의 값을 구하여라.

**풀이** 다음과 같이 분해하여 최소값을 찾는다.

$$\begin{aligned} (\text{준식}) &= (a^2 - a - 1) + (a + b + 1) + \frac{9}{a+b+1} \\ &\geq \left(a - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{5}{4} + 2\sqrt{(a+b+1) \cdot \frac{9}{a+b+1}} \\ &\geq -\frac{5}{4} + 6 = \frac{19}{4} \end{aligned}$$

등호는  $a = \frac{1}{2}, a+b+1 = 3$ , 즉  $b = \frac{3}{2}$  일 때 성립한다. 그럼  $10m+n = 59$ . ◇

**KMO 2004-R1-H14**

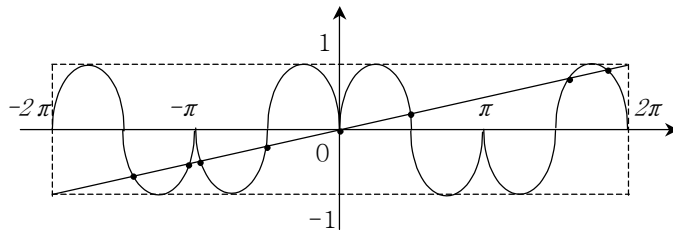
함수  $f(x) = \sin x$  와 다음과 같이 정의된 주기가  $2\pi$ 인 함수  $g(x)$ 에 대하여, 방정식  $(f \circ g)(x) = \frac{x}{2\pi}$  의 실근의 개수를 구하여라.

$$g(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq \pi \\ 4\pi - 2x, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

**풀이**  $y = (f \circ g)(x)$ 의 그래프와  $y = \frac{x}{2\pi}$ 의 그래프에서 교점의 개수를 구하면 된다.

$$(f \circ g)(x) = \begin{cases} \sin 2x, & 0 \leq x \leq \pi \\ -\sin 2x, & \pi < x \leq 2\pi \end{cases}$$

에 주기가  $2\pi$ 이므로 그래프는 다음과 같다.



교점이 8개이므로 실근의 개수는 8개.

◇

**KMO 2004-R1-H15**

상수함수가 아닌 함수  $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 실수  $x$ 에 대하여  $(x^6 - x^5 + x^3 - x + 1)f(x^4) = f(x)$  이다.

(나) 실수  $x$ 와  $y$ 에 대하여  $f(x+y) = \frac{f(x)f(y)}{(2xy-1)f(x)f(y) + f(x) + f(y)}$  이다.

함수  $f(x)$ 의 최대값을 기약분수  $\frac{n}{m}$ 으로 나타낼 때  $10m+n$ 의 값을 구하여라.

**풀이** (나)에  $x = y = 0$ 을 대입하면  $f(0) = \frac{f(0)^2}{-f(0)^2 + 2f(0)}$ . 분모가 0일 수 없으므로  $f(0) \neq 0$ 이고, 따라서 약분하고 정리하면  $f(0) = 1$ 임을 얻을 수 있다. (나)에서  $x = y$ 일 때 분모가 0일 수 없으므로 항상  $f(x) \neq 0$ 이다. (가)의  $x$ 에  $-x$ 를 대입하면

$$(x^6 + x^5 - x^3 + x + 1)f(x^4) = f(-x)$$

가 되고, 이것을 원래의 (가)의 식과 비교하면

$$(x^6 + x^5 - x^3 + x + 1)f(x) = (x^6 - x^5 + x^3 - x + 1)f(-x) \quad (1)$$

이다. 또, (나)의  $y$ 에  $-x$ 를 대입하고 분모를 이항해 정리하면

$$(2x^2 + 2)f(x)f(-x) = f(x) + f(-x) \quad (2)$$

(1)과 (2)에서  $f(-x)$ 를 소거하자.

$$\begin{aligned} 2(x^2 + 1)f(x) &= \frac{x^6 - x^5 + x^3 - x + 1}{x^6 + x^5 - x^3 + x + 1} + 1 \\ &= \frac{2(x^6 + 1)}{x^6 + x^5 - x^3 + x + 1} \\ f(x) &= \frac{x^4 - x^2 + 1}{x^6 + x^5 - x^3 + x + 1} \\ &= \frac{1}{x^2 + x + 1} \end{aligned}$$

따라서,  $f(x)$ 가 최대일 때는 분모  $x^2 + x + 1 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}$  이 최소인  $\frac{3}{4}$ 일 때이고, 그럼  $f(x)$ 의 최대값은  $\frac{4}{3}$ 이다.  $\diamond$

#### KMO 2004-R1-H16

다음 조건을 만족시키는 수열  $\{a_n\}$ 에 대하여  $a_{2002} + a_{2003} + a_{2004}$ 의 값을 구하여라.

(가)  $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1, a_5 = 2,$

(나)  $a_{n+5} = \frac{a_n + a_{n+1} + a_{n+2} + a_{n+3} + a_{n+4}}{a_n a_{n+1} a_{n+2} a_{n+3} a_{n+4} - 1} \quad (n \geq 1)$

**풀이** 조건에 따라 처음 몇 항을 구해보면 다음과 같다.

$$1, 1, 1, 1, 2, 6, 1, 1, 1, 2, \dots$$

즉, 수열의 시작부와 같은 1, 1, 1, 1, 2가 다시 나타나고, 이로부터 수열은 6개항을 주기로 하여 계속 같은 꼴로 반복된다. 따라서,  $a_{2002} + a_{2003} + a_{2004} = a_4 + a_5 + a_6 = 1 + 2 + 6 = 9.$   $\diamond$

#### KMO 2004-R1-H17

다음 방정식을 만족시키는 2004보다 크지 않은 자연수의 쌍  $(x, y)$ 의 개수를 구하여라. (단,  $[t]$ 는  $t$ 를 넘지 않는 가장 큰 정수이다.)

$$\left[ \frac{x^2}{y} \right] + \left[ \frac{y^2}{x} \right] = \left[ \frac{x^2 + y^2}{xy} \right] + xy$$

**풀이**  $x = y$  이면  $2x = 2 + x^2$  인데 이것은 우변이 항상 크므로 성립하지 않는다. 대칭적이므로  $x > y$  일 때만 보자.

$$m = \left[ \frac{x^2}{y} \right], \quad n = \left[ \frac{y^2}{x} \right]$$



라 하자.  $\frac{x^2}{y} \geq m$ ,  $\frac{y^2}{x} \geq n$  이므로  $xy \geq mn$  이다. 또,  $\left[\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right] \geq 2$  이므로 준식에서  $m + n \geq 2 + mn$  이다. 즉,  $(m-1)(n-1) + 1 \leq 0$  이고,  $m \geq 1$  이므로  $n-1 < 0$ , 즉  $n = 0$  이어야만 한다. 따라서,

$$x > y^2$$

$\frac{y^2}{x} < 1$  이므로  $\left[\frac{y^2}{x}\right] = 0$  이 된다. 또,  $\frac{y}{x} < \frac{1}{y}$  이고  $\frac{x}{y}$ 의 소수부는  $\frac{y-1}{y}$  이하이므로  $\frac{x}{y}$ 에  $\frac{y}{x}$ 를 더해도 정수부가 증가하지 않는다. 즉,  $\left[\frac{x^2+y^2}{xy}\right] = \left[\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right] = \left[\frac{x}{y}\right]$  이고, 준식은

$$\left[\frac{x^2}{y}\right] = \left[\frac{x}{y}\right] + xy$$

가 된다. 여기에  $x$ 가 가장 작을 때인  $x = y^2 + 1$  을 대입해보면 양변 모두  $y^3 + 2y + \left[\frac{1}{y}\right]$  이 되어 성립한다.  $x \geq y^2 + 2$  이면

$$(\text{좌변}) \geq \left[\frac{x}{y}\right] + \left[\frac{x(x-1)}{y}\right] \geq \left[\frac{x}{y}\right] + \left[\frac{x(y^2+1)}{y}\right] \geq \left[\frac{x}{y}\right] + xy + 1 > (\text{우변})$$

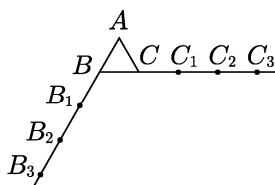
으로 좌변이 우변보다 크게 되어 더 이상 해가 없다. 즉,  $x > y^2$  일 때의 2004 이하의 해는

$$(x, y) = (1^2 + 1, 1), (2^2 + 1, 2), \dots, (44^2 + 1, 44)$$

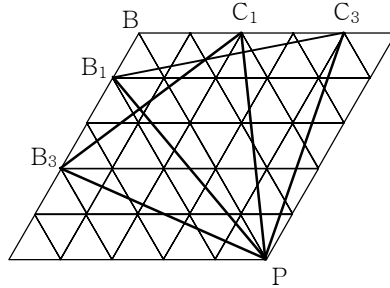
의 44개이고 대칭적으로  $y > x^2$  일 때에도 44개, 그래서 총 88개의 해가 존재한다. ◇

#### KMO 2004-R1-H19

그림과 같이 한 변의 길이가 1인 정삼각형  $ABC$ 의 변  $AB$ 와  $BC$  각각의 연장선에 간격이 1인 점들이 찍혀 있다. 선분  $B_1C_3$ 의 수직이등분선과 선분  $B_3C_1$ 의 수직이등분선의 교점을  $P$ 라고 할 때, 선분  $BP$ 의 길이를 구하여라.



**풀이** 다음과 정삼각형 격자를 그려보면  $PB_1C_3$ 와  $PB_3C_1$ 이 모두 정삼각형임을 쉽게 확인할 수 있다.



즉, 두 선분  $B_1C_3$ 와  $B_3C_1$ 의 수직이등분선들은  $P$ 에서 만나고,  $BP = 5$ .

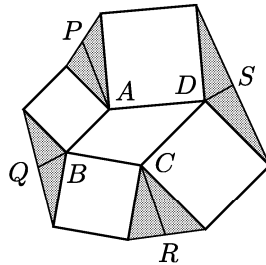
◇

**KMO 2004-R1-H20**

다음을 만족시키는 사각형  $ABCD$ 가 있다.

$$AB = 5, BC = 6, CD = 7, \cos \angle B = \frac{1}{5}, \cos \angle C = -\frac{3}{7}$$

그림과 같이 이 사각형의 외부에 정사각형을 그리면 네 개의 빗금친 삼각형을 얻는다. 그림에서 네 선분  $AP, BQ, CR, DS$ 는 각각 빗금친 삼각형의 중선이다. 이 네 중선의 길이의 합을 구하여라.



**풀이**  $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CD}, \overrightarrow{DA}$ 를 각각  $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}, \vec{w}$ 라 하자. 빗금친 삼각형들을 각각  $90^\circ$  회전하여 보면

$$BQ = \frac{1}{2} \|\vec{x} + \vec{y}\| = \frac{1}{2} \sqrt{5^2 + 6^2 + 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \left(-\frac{1}{5}\right)} = \frac{7}{2}$$

$$CR = \frac{1}{2} \|\vec{y} + \vec{z}\| = \frac{1}{2} \sqrt{6^2 + 7^2 + 2 \cdot 6 \cdot 7 \cdot \frac{3}{7}} = \frac{11}{2}$$

$$DS = \frac{1}{2} \|\vec{z} + \vec{w}\| = \frac{1}{2} \|\vec{x} + \vec{y}\| = BQ$$

$$AP = \frac{1}{2} \|\vec{w} + \vec{x}\| = \frac{1}{2} \|\vec{z} + \vec{w}\| = CR$$

따라서, 네 중선의 길이의 합은  $2BQ + 2CR = 18$ .

◇

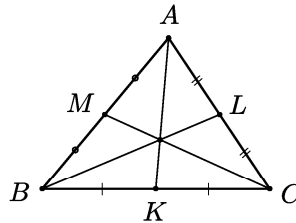
## 2005년 한국 수학올림피아드 풀이

## 중등부

## KMO 2005-R1-M1

삼각형  $ABC$ 에서 세 변  $BC$ ,  $CA$ ,  $AB$ 의 중점을 각각  $K$ ,  $L$ ,  $M$ 이라 하자.  $AB^2 + BC^2 + CA^2 = 200$  일 때,  $AK^2 + BL^2 + CM^2$ 의 값은?

풀이



파푸스의 중선 정리에 의해

$$AB^2 + CA^2 = 2AK^2 + 2BK^2 = 2AK^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

$$BC^2 + AB^2 = 2BL^2 + 2CL^2 = 2BL^2 + \frac{1}{2}CA^2$$

$$CA^2 + BC^2 = 2CM^2 + 2AM^2 = 2CM^2 + \frac{1}{2}AB^2$$

세 식을 변변 더하면  $2(AB^2 + BC^2 + CA^2) = 2(AK^2 + BL^2 + CM^2) + \frac{1}{2}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$ , 즉

$$AK^2 + BL^2 + CM^2 = \frac{3}{4}(AB^2 + BC^2 + CA^2)$$

이 된다. ... **답** 150

◇

## KMO 2005-R1-M2

세 자리 양의 정수  $n$ 의 각 자리의 숫자의 합을  $S(n)$ 이라 하자.  $S(n) \leq 5$  이고,  $n$ 이  $S(n)$ 의 배수가 되는  $n$ 의 개수는?

**풀이** 세 자리의 수를  $n = \overline{abc}$  라 하자.  $S(n) = a + b + c = 1, 2, 3, 4, 5$  에 따라 경우를 나누자.

(1)  $S(n) = 1$  일 때:  $n$ 이 1의 배수임은 항상 성립.  $S(n) = 1$  인 세 자리의 수는 100뿐  
이므로 1개.

(2)  $S(n) = 2$  일 때:  $n$ 이 짝수이므로  $c$ 가 짝수. 그런데  $c < S(n) = 2$  이므로  $c = 0$ . 이제  $S(n) = a + b = 2$  인 것은 200과 110뿐이므로 2개.

(3)  $S(n) = 3$  일 때:  $n$ 이 3의 배수임은 항상 성립.  $S(n) = 3$  인 것을 모두 찾으면 300, 210, 201, 120, 102, 111 등 모두 6개.

(4)  $S(n) = 4$  일 때:  $n$ 이 4의 배수이므로  $\overline{bc}$ 가 4의 배수. 그 중  $b + c < S(n) = 4$  인 것을 찾으면  $\overline{bc} = 00, 12, 20$ 뿐이다. 따라서 400, 112, 220의 3개.

(5)  $S(n) = 5$  일 때:  $n$ 이 5의 배수이므로  $c$ 가 5의 배수. 그런데  $c < S(n) = 5$  이므로  $c = 0$ . 이제  $S(n) = a + b = 5$  인 것을 찾으면 500, 410, 320, 230, 140 등 5개.

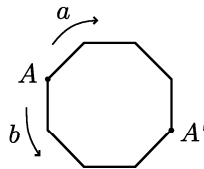
(1)-(5)에서 모두  $1 + 2 + 6 + 3 + 5 = 17$ 개 ... **답**

◇

### KMO 2005-R1-M3

정숙이가 정팔각형의 변을 따라 움직이는 로봇을 만들었다. 이 로봇은 정팔각형의 한 변을 지나가는 데 1분이 걸리며, 각 꼭지점에서는 가던 방향으로 계속 가거나 반대 방향으로 방향을 바꿀 수 있다고 한다. 이 로봇이 한 꼭지점  $A$ 에서 출발하여 8분 동안 계속 움직여 꼭지점  $A$ 의 반대편 꼭지점에 도달할 수 있는 경우의 수는?

**풀이** 시계방향으로 움직인 횟수를  $a$ , 시계반대방향으로 움직인 횟수를  $b$ 라 하자.



꼭지점  $A$ 의 반대편에 도착한다는 것은  $a - b \equiv 4 \pmod{8}$  (즉,  $a - b = 8k + 4$  꼴) 임을 뜻한다.  $a, b \geq 0$ ,  $a + b = 8$  이므로  $a - b = \pm 4$  뿐이다. 즉,  $(a, b) = (6, 2)$  또는  $(2, 6)$ .  $(a, b) = (6, 2)$  인 경우는 8번의 움직임 중에서 시계반대방향으로 움직일 2번을 택하는 경우의 수이므로  $\frac{8!}{2!} = 28$ 가지. 대칭적으로  $(a, b) = (2, 6)$  인 경우도 28가지. ... **답**

56

◇

### KMO 2005-R1-M4

조건  $2 \leq x \leq 4$ ,  $x \leq y$ ,  $3 \leq y \leq 5$  를 만족시키는 실수  $x, y$ 에 대하여,  $\frac{2+xy}{x+y}$  의 최대값은?

**풀이** (부천 상도중 2학년 김성민)  $x = a$  로 일정할 때

$$\frac{2+ay}{a+y} = \frac{a(y+a) - (a^2-2)}{y+a} = a - \frac{a^2-2}{y+a}$$

이므로 이것은  $y$ 가 최대일 때(즉,  $y = 5$  일 때) 최대값을 갖는다. 따라서,  $y = 5$  일 때  
중에만 최대값이 있고, 그럼

$$\frac{5x+2}{x+5} = 5 - \frac{23}{x+5}$$

도 역시  $x$ 가 최대일 때 최대값을 갖는다. 따라서, 최대값은  $(x, y) = (5, 4)$  일 때 ...

**답**  $\frac{22}{9}$ .

◇

#### KMO 2005-R1-M5

다음 중, 정수  $x, y, z$ 에 대하여  $x^2 + y^2 + 5z^2$  꼴로 쓸 수 없는 정수는?

- (1) 2003      (2) 2004      (3) 2005      (4) 2020      (5) 2046

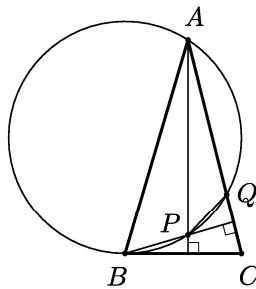
**풀이** 8로 나눈 나머지를 따지면  $x^2$ 과  $y^2$ 은 0, 1, 4가,  $5z^2$ 은 0, 4, 5가 가능하다. 이들의 합을 모두 따지면  $8k+3$ 꼴은 나오지 않음을 알 수 있다. 따라서, 2003은 불가능. 나머지 수들은  $2004 = 0^2 + 2^2 + 5 \cdot 20^2$ ,  $2005 = 1^2 + 2^2 + 5 \cdot 20^2$ ,  $2020 = 2^2 + 4^2 + 5 \cdot 20^2$ ,  $2046 = 4^2 + 15^2 + 5 \cdot 19^2$  등으로 다 표현 가능하다. ... **답** (1) 2003

◇

#### KMO 2005-R1-M6

삼각형  $ABC$ 에서  $\angle A = 30^\circ$ ,  $AB = AC$  이다. 점  $A$ 에서 변  $BC$ 에 그은 수선과 점  $B$ 에서 변  $AC$ 에 그은 수선의 교점을  $P$ , 삼각형  $ABP$ 의 외접원과 변  $AC$ 의 교점 중  $A$ 가 아닌 점을  $Q$ 라고 할 때,  $\angle PQC$ 의 크기는?

**풀이**



내각과 여각에 의해  $\angle PQC = \angle ABP = 90^\circ - \angle A = 60^\circ$  ... **답**

◇

#### KMO 2005-R1-M7

정수  $10^{6015} - 10^{1203} - 10^{15} + 10^k$  이 2005의 배수가 되도록 하는 최소의 양의 정수  $k$ 는?

**풀이**  $2005 = 5 \cdot 401$  로 소인수분해된다. 5의 배수임은 당연하므로, 401의 배수가 되는지만 확인하면 된다. 페르마의 작은 정리에 의해  $10^{400} \equiv 1 \pmod{401}$ . 그럼

$$10^{6015} - 10^{1203} - 10^{15} + 10^k \equiv 10^{15} - 10^3 - 10^{15} + 10^k = 10^k - 10^3 \pmod{401}$$

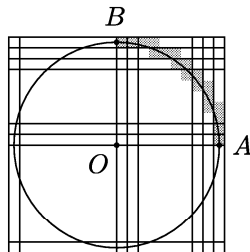
이므로, 이것이 성립하는 가장 작은  $k$ 는 3 ... **답**

◇

#### KMO 2005-R1-M8

현선이 해돋이 구경을 가서 해의 사진을 찍었다. 다녀와서  $1\text{mm}$  마다 눈금이 그어진  $2006\text{mm} \times 2006\text{mm}$  크기의 모눈종이에 지름  $2005\text{mm}$  인 원 모양의 해의 사진을 인화하였다. 해의 중심이 모눈종이의 중심과 일치한다고 할 때, 해의 둘레가 지나가는 모눈종이의 ( $1\text{mm} \times 1\text{mm}$  크기의) 정사각형의 개수는?

**풀이** 모눈종이의 중심을 원점으로 하고 모눈종이의 눈금과 같은 방향의 좌표평면을 생각하자. 그럼 모눈종이의 각 격자점은 이 좌표평면의 격자점과 일치한다.



만일 원(해의 둘레)이 지나는 격자점  $(a, b)$ 가 있다면, 그 점과 원점 사이의 거리가  $a^2 + b^2 = (\frac{2005}{2})^2$  을 만족해야 하는데, 좌변은 정수이고 우변은 정수가 아니어서 모순이다. 따라서, 이 원은 어떤 격자점도 지나지 않는다. 각 사분면에서 원이 모눈을 지나가는 모양이 모두 대칭적이므로 1사분면만 생각하기로 하자. 원주 위의 점  $A(\frac{2005}{2}, 0)$ 에서  $B(0, \frac{2005}{2})$ 까지 움직이는 동안, 격자점을 지나가는 경우는 없으므로, 윗칸으로 이동하거나 왼쪽칸으로 이동하거나를 반복하게 된다. 윗칸으로 이동해야 하는 횟수가 1002번, 왼쪽칸으로 이동해야 하는 횟수가 1002번이므로, 처음 출발하는 칸을 포함하면 모두 2005개의 칸을 지나게 된다. 이것이 4개의 사분면 각각에 대해 마찬가지로이므로 이 원이 지나가는 칸의 개수는 모두  $4 \cdot 2005 = 8020$ 개 ... **답**

◇

#### KMO 2005-R1-M9

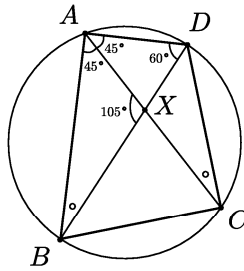
함수  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  가  $f(x) + f(1-x) = 7$  과  $x + f(\frac{x}{3}) = \frac{1}{2}f(x)$  를 만족시킬 때,  $f(\frac{1}{9})$ 의 값은? (단,  $\mathbb{R}$ 은 실수 전체의 집합이다.)

**풀이** 뒷식에  $x = 0$  을 대입하면  $f(0) = 0$ . 다시 앞식에  $x = 0$  을 대입하면  $f(1) = 7$  이 된다. 이제 뒷식에  $x = 1$ ,  $x = \frac{1}{3}$  을 차례로 대입하면  $f(\frac{1}{3}) = \frac{1}{2}f(1) - 1 = \frac{5}{2}$ ,  $f(\frac{1}{9}) = \frac{1}{2}f(\frac{1}{3}) - \frac{1}{3} = \frac{11}{12} \dots$  **답** ◇

### KMO 2005-R1-M10

사각형  $ABCD$ 에서  $\angle A = 90^\circ$ ,  $\angle B = 75^\circ$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle D = 105^\circ$  이다. 두 대각선  $AC$ 와  $BD$ 의 교점  $X$ 가  $\angle BXA = 105^\circ$  를 만족시킬 때, 선분의 길이의 비  $BX : XD$  는?

**풀이** 대각의 합이  $180^\circ$ 이므로  $\square ABCD$ 는 원에 내접하는 사각형. 원주각에 의해  $\angle ABX = \angle ACD$  이고, 문제의 조건에 의해  $\angle AXB = 105^\circ = \angle ADC$ . 따라서,  $\triangle ABX \sim \triangle ACD$ . 그럼  $\angle BAX = \angle CAD = \frac{1}{2}\angle A = 45^\circ$  가 되고, 이로부터 나머지 각들도 모두 계산할 수 있다. 특히  $\triangle ABD$ 는  $\angle ABD = 30^\circ$  인 직각삼각형이 되고,  $AX$ 는  $\angle A$ 의 이등분선이므로,



각의 이등분선 정리에 의해  $BX : XD = BA : AD = \sqrt{3} : 1 \dots$  **답** ◇

### KMO 2005-R1-M11

실수  $x$ 에 대하여,  $x^2 + \frac{16}{x^2+1}$  의 최소값을 구하여라.

**풀이** (대전 대덕중 3학년 고기혁)  $x^2 + 1 > 0$  이므로 산술-기하평균 부등식에서

$$(\text{준식}) = (x^2 + 1) + \frac{16}{x^2 + 1} - 1 \geq 2\sqrt{(x^2 + 1)\frac{16}{x^2 + 1}} - 1 = 2 \cdot 4 - 1 = 7$$

$x = \pm\sqrt{3}$  일 때 실제 등호가 성립하므로, 최소값은 7  $\dots$  **답** ◇

### KMO 2005-R1-M12

정수  $k$ 에 대하여, 방정식  $x^3 = 14 + k$  의 실근에 가장 가까운 정수를  $a_k$ 라 할 때,  $a_1 + a_2 + a_3 + a_4$  를 구하여라.

**풀이**  $x$ 를 소수 첫째 자리에서 반올림한 것을  $\langle x \rangle$ 로 쓰기로 한다면  $a_1, a_2, a_3, a_4$ 는 각각  $\langle 15 \rangle, \langle 16 \rangle, \langle 17 \rangle, \langle 18 \rangle$ 이다.  $2^3 < 15, 15 < 2.5^3 < 16, 18 < 3^3$  이므로  $a_1, a_2, a_3, a_4$ 는 각각 2, 3, 3, 3이 된다. ... **답** 11 ◇

### KMO 2005-R1-M13

양의 정수  $a, b$ 에 대하여,  $y = (x - a)^2$ 의 그래프와  $y = b^2 - x^2$ 의 그래프의 두 교점과 두 그래프의  $y$ -축과의 교점들을 꼭지점으로 하는 사각형의 넓이가  $12\sqrt{7}$ 일 때,  $a + b$ 의 값을 구하여라. (단,  $a < b$ 이다.)

**풀이** 두 그래프의  $y$ -절편은  $a^2$ 과  $b^2$ 이고, 두 교점은 그래프를 그려보면  $x$ -좌표의 부호가 서로 다르게 나타난다. 즉,  $(x - a)^2 = b^2 - x^2$ 의 두 근을  $\alpha, \beta$ 라 하면 구하는 사각형의 넓이는 삼각형 2개의 넓이의 합으로 보아서

$$\frac{1}{2}(b^2 - a^2)(|\alpha| + |\beta|) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2)|\alpha - \beta| = 12\sqrt{7}$$

이 된다.  $2x^2 - 2ax + a^2 - b^2 = 0$ 에서  $\alpha + \beta = a, \alpha\beta = \frac{1}{2}(a^2 - b^2)$ 이므로

$$(\alpha - \beta)^2 = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta = 2b^2 - a^2$$

위의 넓이의 식을 제공한 것에 이것을 대입하면

$$(b^2 - a^2)^2(2b^2 - a^2) = 2^6 3^2 7$$

이 된다. 만일  $a$ 와  $b$ 가 홀짝이 서로 다르면  $b^2 - a^2$ 은 홀수이고  $2b^2 - a^2 \equiv 2 - 0 \text{ or } 0 - 1 \pmod{4}$ 로 좌변이 4의 배수가 될 수 없어 모순. 따라서,  $a$ 와  $b$ 는 홀짝이 같고, 그럼  $b - a \geq 2, b + a \geq 4$ 이므로  $b^2 - a^2 \geq 8$ .  $(b^2 - a^2)^2$ 이  $2^6 3^2 7$ 의 약수임에서  $b^2 - a^2 = 8, 12, 24$ 만이 가능하다. 이 때, 각각  $2b^2 - a^2 = 63, 28, 7$ 이고,  $b^2 = 55, 16, -17$ 이 되어, 가능한 것은  $b^2 = 16$ 뿐이다. 즉,  $b = 4, a = 2$ .  $a + b = 6$  ... **답** ◇

### KMO 2005-R1-M14

$18x + 19y = 2005$ 를 만족시키는 양의 정수쌍  $(x, y)$ 의 개수를 구하여라.

**풀이** 특수해  $(-2005, 2005)$ 를 찾을 수 있으므로, 일반해는

$$x = 19k - 2005, \quad y = -18k + 2005$$

들이 된다( $k$ 는 임의의 정수).  $x, y$  모두 양수라야 하므로  $\frac{2005}{19} < k < \frac{2005}{18}$ , 즉  $105. \dots < k < 111. \dots$  이므로  $k = 106, 107, \dots, 111$ . ... **답** 6개 ◇



## KMO 2005-R1-M15

여러 사람이 모인 자리에서 서로 아는 사람끼리만 한 번씩 악수를 하였다고 하자. 각 사람마다 악수한 횟수가 모두 같고 전체 악수의 횟수가 2005번일 때, 모인 사람의 수가 될 수 있는 가장 작은 수를 구하여라.

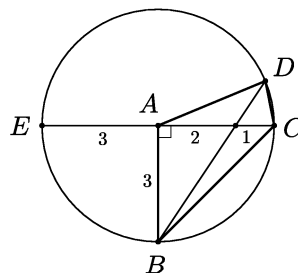
**풀이** 모인 사람의 수를  $n$ 이라 하고, 각 사람마다 악수한 (일정한) 횟수를  $k$ 라 하자. 각각의 악수는 두 사람 사이에 이루어지므로 각 사람마다 악수한 횟수를 모두 합하면 각각의 악수가 2번씩 세어져 전체 악수의 횟수의 2배가 된다. 즉,  $nk = 4010$  이고,  $4010 = 2 \cdot 5 \cdot 401$  로 소인수분해되므로,  $n > k$  의 조건을 생각하면  $n$ 은 최소 401이 되어야 한다.

그리고  $n = 401$ ,  $k = 10$  의 경우는 다음과 같이 실제로 구성될 수 있다: 15명을 5명, 5명, 5명의 3개조로 나누고 같은 조의 구성원끼리는 서로 모르는 것으로 하고 서로 다른 조에 있는 구성원끼리만 항상 아는 것으로 하면 이 15명은  $k = 10$  을 만족한다. 또 11명을 모두 서로 아는 것으로 하면 역시  $k = 10$  을 만족한다. 이 두 가지를 이용해 401명을  $26 \cdot 15 + 11$ , 즉 15명씩 26개 집합과 11명의 집합 하나로 나누면 모두  $k = 10$  을 잘 만족한다. ... **답** 401 ◇

## KMO 2005-R1-M16

볼록사각형  $ABCD$ 에서  $AB = AC = AD$ ,  $\angle CAB = 90^\circ$  이다. 두 대각선  $AC$ 와  $BD$ 의 교점  $M$ 에 대하여  $AM = 2$ ,  $MC = 1$  이라 할 때,  $13BD^2$  을 구하여라.

**풀이** (대전 전민중 3학년 김충은)  $A$ 를 중심으로 하고 반지름 3인 원을 그리면  $B, C, D$ 를 모두 지난다. 이 원 위의  $C$ 의 대칭점을  $E$ 라 하자.



피타고라스 정리에 의해  $BM = \sqrt{13}$  이고, 원과 할선 사이의 비례관계에 의해  $BM \cdot MD = EM \cdot MC$ , 즉  $MD = \frac{5}{\sqrt{13}}$  이다. 따라서,  $BD = BM + MD = \frac{18}{\sqrt{13}}$  이고,  $13BD^2 = 18^2 = 324$  ... **답** ◇



의 점화식이 된다. 이것은

$$\frac{1}{g(n)} - 1 = 2 \left( \frac{1}{g(n-1)} - 1 \right) = \dots = 2^{n-1} \left( \frac{1}{g(1)} - 1 \right) = \frac{-2^n}{3}$$

으로 풀 수 있고, 그럼  $g(n) = \frac{-3}{2^n - 3}$ , 즉

$$f(n) = \frac{2^{n+1} - 9}{2^n - 3}$$

유클리드 호제법으로  $\gcd(2^{n+1} - 9, 2^n - 3) = \gcd(3, 2^n - 3) = 1$  이므로 이것은 기약분수. 따라서,  $p = 2^{2005} - 3$  이다.  $2^5 \equiv 1 \pmod{31}$  이므로

$$p = 2^{2005} - 3 \equiv 1 - 3 = -2 \pmod{31}$$

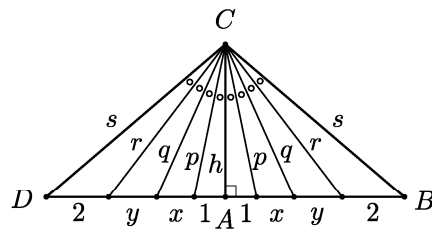
따라서,  $p$ 를 31로 나눈 나머지는 29 ... **답**

◇

#### KMO 2005-R1-M19

$\angle A = 90^\circ$  인 직각삼각형  $ABC$ 와 변  $AB$  위의 세 점  $X_1, X_2, X_3$ 에 대하여  $\angle ACX_1 = \angle X_1CX_2 = \angle X_2CX_3 = \angle X_3CB$  이고,  $BX_3 = 2AX_1$  이다. 삼각형  $ABC$ 의 가장 작은 각의 크기를  $a^\circ$ 라 할 때,  $7a$ 의 값을 구하여라.

**풀이** 일반성을 잃지 않고  $AX_1 = 1$  로 두자. 그리고,  $X_1X_2 = x$ ,  $X_2X_3 = y$  라 하고,  $CA, CX_1, CX_2, CX_3, CB$ 를 차례로  $h, p, q, r, s$ 라고 하자. 이제 아래 그림처럼  $AC$ 에 대해 대칭시킨 직각삼각형을 함께 고려해보자.



각의 이등분선 정리에서

$$x : y = p : r = 2 : x + y$$

$$y : 2 = q : s = x + 2 : x + y + 2$$

이 두 식에서  $x, y$ 에 대한 연립방정식  $2y = x(x + y)$ ,  $2(x + 2) = y(x + y + 2)$  를 얻을 수 있다. 첫 번째 식에서 구한

$$y = \frac{x^2}{2 - x} \quad (1)$$

을 두 번째 식에 대입하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$x^3 - 4x^2 - 4x + 8 = 0 \quad (2)$$

다시 각의 이등분선 정리에서  $1 : x = h : q$ , 즉 여기다 피타고라스의 정리를 적용하여  $(hx)^2 = q^2 = h^2 + (1+x)^2$ . 이로부터

$$h^2 = \frac{1+x}{1-x} \quad (3)$$

를 얻는다.

$$CX_1 = X_1B \quad (*)$$

즉  $p = x+y+2$  임을 확인해보자. 양변을 제곱하면, 피타고라스의 정리에서  $p^2 = h^2 + 1$  이므로

$$\begin{aligned} h^2 + 1 &= (x+y+2)^2 \\ \frac{2x}{1-x} &= \left( x + \frac{x^2}{2-x} + 2 \right)^2 = \frac{(2x - x^2 + x^2 + 4 - 2x)^2}{(2-x)^2} = \frac{16}{(2-x)^2} \\ x(2-x)^2 &= 8(1-x) \end{aligned}$$

와 같이 동치변형되고, 이것을 정리하면 (2)의 식과 같아 성립하는 식임을 알 수 있다. 따라서, (\*)이 증명되었고, 그럼  $\triangle X_1BC$ 가 이등변삼각형이 되어  $\angle B = \angle X_1CB = \frac{3}{4}\angle C$ 가 된다. 그럼 작은 작은  $\angle B = a^\circ$  이고,  $\angle B + \angle C = 90^\circ$  이므로  $a + \frac{4}{3}a = \frac{7}{3}a = 90$ . 따라서,  $a = \frac{3}{7} \cdot 90 = \frac{270}{7} \dots$  **답** ◇

#### KMO 2005-R1-M20

정육각형 모양의 같은 크기의 타일이 빈틈 없이 깔려 있는 어떤 목욕탕의 바닥에서, 가장 자리로부터 여러 개의 타일을 뜯어내었다. 남아 있는 타일들이 이루는 도형을 살펴 보았더니, 바깥 변의 개수가 34개였다. 두 개의 타일이 만나는 꼭지점은 14개이고, 세 개의 타일이 만나는 꼭지점은 8개라고 한다. 이 때, 남아 있는 타일의 개수를 구하여라. (단, 붙어 있는 타일들은 변을 공유하면서 붙어 있다고 가정한다.)

**풀이** 남아있는 타일의 개수를  $f$ , 변의 수를  $e$ , 꼭지점의 수를  $v$ 라 하자. 바깥 변은 하나의 타일에만 관련되고 내부의 변은 두 타일에 인접해 있으므로, 각 타일에서 변의 개수를 모두 세어 합하면  $6f = 2(e - 34) + 34 = 2e - 34$ , 즉  $e = 3f + 17$  이다. 바깥 꼭지점의 수는 바깥 변의 수와 같고, 내부의 꼭지점은 3개의 타일이 만나는 꼭지점과 같으므로,  $v = 34 + 8 = 42$  이다. 평면그래프에 대한 오일러의 공식  $v - e + f = 1$  에 넣어보면  $42 - (3f + 17) + f = 1$ , 즉  $f = 12 \dots$  **답** ◇

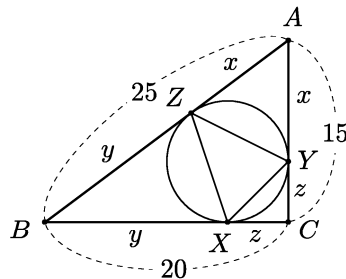
**별해** (과천고 1학년 홍성준) 지나는 타일이 하나뿐인 꼭지점의 개수를  $t$ 라 하자. 이런 점은 2개의 변과 만나고, 그외의 점은 3개의 변과 만난다. 각 변은 2개의 꼭지점과 만나므로 각 꼭지점에서 그 점을 지나는 변의 개수를 모두 세면  $2e = 2t + 3(14 + 8)$ , 즉  $e = t + 33$  이다.  $v = t + 14 + 8 = t + 22$  이므로, 평면에서의 오일러의 공식  $v - e + f = 1$  에서  $(t + 22) - (t + 33) + f = 1$ , 즉  $f = 12 \dots$  **답** ◇

## 고등부

### KMO 2005-R1-H1

세 변의 길이가 각각 15, 20, 25인 삼각형  $ABC$ 의 내접원이 삼각형  $ABC$ 와 점  $X, Y, Z$ 에서 접한다. 삼각형  $XYZ$ 의 넓이는?

**풀이** 세 변의 길이비가 3 : 4 : 5 이므로 직각삼각형이다.  $\angle C$ 를 직각이라 하고, 보통의 순서대로 세 변의 길이를  $a, b, c$ , 그리고 각 접점에서 이웃한 꼭지점까지의 거리를  $x, y, z$ 라 하자.



그럼 연립하여 풀면  $x = 10, y = 15, z = 5$  임을 금방 얻는다.

$$\begin{aligned}
 |\triangle XYZ| &= |\triangle ABC| - |\triangle AZY| - |\triangle BXZ| - |\triangle CYX| \\
 &= |\triangle ABC| \left( 1 - \frac{10}{15} \cdot \frac{10}{25} - \frac{15}{20} \cdot \frac{15}{25} - \frac{5}{20} \cdot \frac{5}{15} \right) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 15 \left( 1 - \frac{4}{15} - \frac{9}{20} - \frac{1}{12} \right) \\
 &= 150 - 40 - \frac{135}{2} - \frac{25}{2} = 30
 \end{aligned}$$

이므로 구하는 넓이는  $\dots$  **답** 30 ◇

### KMO 2005-R1-H2

블록 $n$ 각형의 모든 변과 모든 대각선을 빨간색 또는 파란색으로 칠하였더니 빨간색 선분의 개수와 파란색 선분의 개수가 같았다. 다음 중  $n$ 이 될 수 있는 두 수로 이루어진 것은?

- (1) 2005, 2006   (2) 2006, 2007   (3) 2007, 2008   (4) 2008, 2009   (5) 2009, 2010

**풀이** 블록 $n$ 각형의 모든 변을 포함한 모든 대각선의 수는  $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ 개이므로, 빨간색 선분과 파란색 선분은 각각  $\frac{1}{2}\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$ 개씩이다. 이것이 정수가 되려면  $n = 4k$  또는  $n = 4k + 1$ 이어야 한다. ... **답** (4) 2008, 2009 ◇

### KMO 2005-R1-H3

200보다 작은 서로 다른 여섯 개의 소수가 작은 것부터 차례로 등차수열을 이룬다고 할 때, 이 수열의 공차는?

**풀이** (과천고 1학년 홍성준, 조금 수정됨) 공차  $d$ 가  $p$ 의 배수가 아니면  $p$ 와 서로 소이므로 처음  $p$ 개의 항을  $p$ 로 나눈 나머지가 모두 다르게(완전잉여계를 구성하게) 되어, 처음  $p$ 개항 중에  $p$ 의 배수가 반드시 있다. 그런데 초항  $a$ 가 5 이하이면  $a + 1$ 번째 항  $a + ad = a(1 + d)$ 가 합성수이므로 안 되고, 따라서  $a > 5$  이고 2, 3, 5의 배수는 있을 수 없다. 따라서,  $d$ 는 2, 3, 5의 배수여야 한다. 즉,  $d$ 는 30의 배수인데, 6개의 수가 모두 200보다 작으므로  $d = 30$  일 수밖에 없다. 실제로 7, 37, 67, 97, 127, 157이 그러한 예가 된다. ... **답** 30 ◇

### KMO 2005-R1-H4

모든 양의 실수  $x$ 에 대하여,  $\frac{1}{2+x^2} \geq \frac{y-x}{2y+x}$  를 만족시키는  $y$ 의 최대값은?

**풀이** (대원외고 3학년 최일규)  $y > 0$  일 때를 보자. 이 때 만족하는 값이 있다면 최대값을 구하는 것이므로 음수일 때는 생각할 필요가 없어진다.  $2 + x^2 > 0$ ,  $2y + x > 0$  이므로 양변에  $(2 + x^2)(2y + x)$ 를 곱하면

$$2y + x \geq (y - x)(2 + x^2)$$

$$3x + x^3 \geq yx^2$$

$$\frac{3}{x} + x \geq y$$

와 같이 동치변형된다. 산술-기하평균 부등식에서  $\frac{3}{x} + x \geq 2\sqrt{\frac{3}{x} \cdot x} = 2\sqrt{3}$  이고  $x = \sqrt{3}$  일 때 등호가 성립하므로, 모든 양의 실수  $x$ 에 대해 위 식이 성립할 필요충분조건은  $y \leq 2\sqrt{3}$  이다. ... **답**  $2\sqrt{3}$  ◇

Ⓜ  $x^2 - xy + 3 \geq 0$  이 성립할 조건으로 다른 설명없이 판별식  $D \leq 0$  만을 적어버린 학생들이 여럿 있었는데,  $x$ 가 실수 전체의 범위가 아닌 양의 실수의 범위이므로 판별식이  $D > 0$  일 때도 성립하는 경우가 있을 수 있다는 것을 생각해야 합니다. 여기서는 포물선의 축이  $x = \frac{y}{2}$  로 양의 범위에 있으므로 최소값이 항상 양의 범위에서 발생하여 그런 경우는 생기지 않지만.

#### KMO 2005-R1-H5

방정식  $x(x - [x]) = 1$  의 해를 작은 것부터 차례로  $x_1, x_2, x_3, \dots$  라 할 때,  $(2x_1 - 1)^2 + (2x_2 - 2)^2 + \dots + (2x_{10} - 10)^2$  의 값은? (단,  $[x]$ 는  $x$ 를 넘지 않는 가장 큰 정수를 나타낸다.)

풀이 (김대성)  $0 \leq x - [x] < 1$  이므로  $x > 1$  이다.  $[x] = n$  이라 하자( $n \geq 1$ ). 그럼  $n \leq x < n + 1$  의 범위가 주어지고, 이 범위에서  $f_n(x) = x(x - n)$  은  $x$ 에 대한 연속인 단조증가함수가 된다.  $f_n(n) = 0 < 1$ ,  $f(n + 1) = n + 1 > 1$  이므로, 중간값 정리에 의해  $f_n(x) = 1$  은 해를 꼭 하나 갖는다. 따라서, 각각의  $n$ 에 대해 그 해를  $x_n$ 으로 정하면 그것이 작은 것부터 차례로 정한 순서와 일치한다. 또,  $x_n(x_n - n) = 1$  에서  $(2x_n - n)^2 = 4x_n(x_n - n) + n^2 = 4 + n^2$ . 따라서,

$$\sum_{n=1}^{10} (2x_n - n)^2 = \sum_{n=1}^{10} (4 + n^2) = 40 + \frac{10 \cdot 11 \cdot 21}{6} = 425 \quad \dots \text{답}$$

◇

#### KMO 2005-R1-H6

함수  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  을 생각하자.  $f(5) \neq 0$  이고, 임의의 실수  $x, y$  (단,  $y \neq 0$ ) 에 대하여  $f(x + y)f(x - y) = 2|y|f\left(\frac{x^2 - y^2 + 25}{2y}\right)$  일 때,  $f(1)f(25)$ 의 값은? (단,  $\mathbb{R}$ 은 실수 전체의 집합이다.)

풀이 (서울 환일고 2학년 김태우)  $x = y = \frac{5}{2}$  를 대입하면  $f(5)f(0) = 5f(5)$ .  $f(5) \neq 0$  이라 했으므로  $f(0) = 5$ .  $x$ 에  $\pm y$ 를 각각 대입하면 우변이 같음에서

$$f(2y)f(0) = 2|y|f\left(\frac{25}{2y}\right) = f(0)f(-2y)$$

따라서,  $f(0) = 5$  를 소거하고  $2y$  대신  $x$ 로 두면 임의의  $x(x \neq 0)$ 에 대해  $f(x) = f(-x)$ . 이제  $x = 12, y = 13$  을 대입하면  $f(25)f(-1) = f(25)f(1) = 26f(0) = 130 \quad \dots \text{답} \quad \diamond$

## KMO 2005-R1-H7

방정식  $n(m^2 + n^2 - 1) - m(m^2 + n^2 + 47) = 0$  을 만족시키는 양의 정수쌍  $(m, n)$ 의 집합을  $A = \{(m_i, n_i) \mid i = 1, 2, \dots, k\}$  라 할 때  $m_1 + m_2 + \dots + m_k$  의 값은?

**풀이** (대전 전민중 3학년 정명진, 수정됨)  $n(m^2 + n^2 - 1) = m(m^2 + n^2 + 47)$  에서 모든 인수가 양수이고  $m^2 + n^2 - 1 < m^2 + n^2 + 47$  이므로  $n > m$  이어야 한다.  $n = m + k$  라 두자( $k \geq 1$ ).

$$\begin{aligned}(m+k)(m^2+n^2-1) &= m(m^2+n^2+47) \\ -m+km^2+kn^2-k &= 47m \\ 2km^2+2k^2m+k^3-k &= 48m \\ km^2+(k^2-24)m+\frac{k(k^2-1)}{2} &= 0\end{aligned}$$

$k \geq 4$  이면

$$(\text{좌변}) \geq 4m^2 - 8m + 30 > 8(m-1)^2 \geq 0$$

으로 성립하지 않는다. 따라서,  $k = 1, 2, 3$  만 가능.

- $k = 1$  이면;  $m^2 - 23m = 0$ .  $\therefore m = 23$ .
- $k = 2$  이면; 좌변이 홀수이므로 모순.
- $k = 3$  이면;  $3m^2 - 15m + 12 = 0$ .  $(m-1)(m-4) = 0$ .  $\therefore m = 1, 4$ .

따라서, 가능한  $m$ 은 1, 4, 23뿐이고,  $1 + 4 + 23 = 28$  ... **답**

◇

(주) 이외에 몇몇 학생이 제출한 풀이에서는,  $km^2 + (k^2 - 24)m + \frac{1}{2}k(k^2 - 1) = 0$  에서 이 식의 정수해를 가져야 하므로 근과 계수와의 관계를 이용,  $\frac{k^2-24}{k}$  와  $\frac{1}{2}(k^2-1)$  이 정수여야 한다고 주장하며 풀이를 쓴 사례가 있었다. 그러나, 정수해를 갖는 것과 두 근이 모두 정수라는 것은 다른 얘기이므로 이런 풀이는 직접 성립하지 않는다.

## KMO 2005-R1-H8

다음 중, 정수  $n$ 에 대하여  $n^2 - 2n + 4$  꼴의 배수를 가질 수 없는 소수는?

- (1) 29      (2) 31      (3) 37      (4) 43      (5) 61

**풀이** (대전 전민중 3학년 정명진)  $(n-1)^2 + 3$  이  $p$ 의 배수가 되는 경우가 있다는 것은  $(n-1)^2 \equiv -3 \pmod{p}$ , 즉  $-3$ 이  $\text{mod } p$ 에 대한 이차잉여가 된다는 것이다.  $p$ 가  $3k \pm 1$  꼴의 소수이면



- $p$ 가  $4m + 1$ 꼴일 때;

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) \cdot \left(\frac{3}{p}\right) = 1 \cdot \left(\frac{p}{3}\right) = \left(\frac{\pm 1}{3}\right) = \pm 1$$

- $p$ 가  $4m + 3$ 꼴일 때;

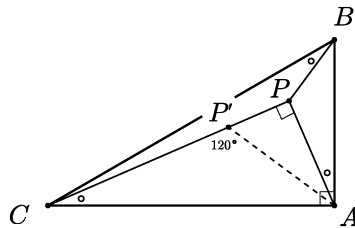
$$\left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right) \cdot \left(\frac{3}{p}\right) = (-1) \cdot (-1) \left(\frac{p}{3}\right) = \left(\frac{\pm 1}{3}\right) = \pm 1$$

로,  $3k + 1$ 꼴이면 항상  $-3$ 이 이차잉여이고  $3k - 1$ 꼴이면 항상 비이차잉여임을 알 수 있다. ... **답** (1) 29 ◇

#### KMO 2005-R1-H9

$\angle A = 90^\circ$ ,  $\angle B = 60^\circ$ ,  $\angle C = 30^\circ$  인 삼각형  $ABC$ 의 내부에 있는 점  $P$ 가  $\angle PAB = \angle PBC = \angle PCA$  를 만족시킬 때,  $\sin^2 \angle PAB$  의 값은?

**풀이** (대전과학고 1학년 김두리)  $90^\circ = \angle BAC = \angle BAP + \angle PAC = \angle PCA + \angle PAC$  이므로  $\angle APC = 90^\circ$ . 비슷하게  $\angle BPA = 120^\circ$ ,  $\angle BPC = 150^\circ$ .



$\triangle BPA \sim \triangle AP'C$  가 되게  $PC$  위에 점  $P'$ 을 잡자.  $BA : AC = 1 : \sqrt{3}$  이므로 두 삼각형의 닮음비는  $1 : \sqrt{3}$ .  $PP' = 1$  이라 하면 직각삼각형  $APP'$ 에서  $AP = \sqrt{3}$ . 그럼 닮음비에 의해  $P'C = 3$ . 따라서,  $AC^2 = AP^2 + PC^2 = 3 + 16 = 19$ .  $\sin^2 \angle PAB = \sin^2 \angle PCA = \frac{AP^2}{AC^2} = \frac{3}{19}$  ... **답** ◇

#### KMO 2005-R1-H10

원을 6개의 합동인 부채꼴로 나누어 각 부채꼴을 빨강, 파랑, 노랑, 초록 4개의 색 중 하나의 색으로 칠하기로 하자. 같은 색을 여러 번 사용할 수는 있지만, 이웃한 부채꼴은 다른 색으로 칠하여야 한다. 원을 칠하는 서로 다른 방법의 수를 구하여라. (단, 원을 회전시켜 같아지는 칠하기는 같은 것으로 간주한다.)

**해답** 풀이를 정리해놓는게 그다지 의미가 없는 막노동 문제이므로 답만 정리해놓는다. 2개의 색만을 쓸 때 6가지, 3개의 색만을 쓸 때 44가지, 4개의 색을 모두 쓸 때 80가지. 그래서 모두  $6 + 44 + 80 = 130$ 가지 ... **답** ◇

## KMO 2005-R1-H11

256 이하의 양의 정수 중, 2진법으로 표현했을 때 1이 홀수 번 나타나는 것들의 총합을 나누는 가장 큰 홀수를 구하여라.

**풀이1 (과천고 1학년 홍성준)** 256을 제외한 나머지 수들은 2진법으로 8자리 이하의 양의 정수이다. 8은 짝수이므로 1이 홀수 번 나타나는 2진수에서 각 자리의 0은 모두 1로, 1은 모두 0으로 바꾸면 또 다른 1이 홀수 번 나타나는 2진수와 대응된다(예: 00101100  $\leftrightarrow$  11010011). 이렇게 정확히 둘씩 서로 대응되고 그 둘을 합하면 언제나  $11111111_{(2)} = 255$  이므로, 1이 홀수 번 나타나는 8자리 이하의 2진수의 개수가  $n = \binom{8}{1} + \binom{8}{3} + \binom{8}{5} + \binom{8}{7} = 128$  임에서, 그런 수들의 총합은  $\frac{n \cdot 255}{2} = 64 \cdot 255$  가 된다. 여기서 앞서 제외했던 256을 더하면  $64 \cdot 259$ . 따라서 이 총합을 나누는 가장 큰 홀수는 ... **답** 259 ◇

**풀이2 (대전과학고 2학년 송지용)** 256 미만의 수는 모든 8자리 이하의 이진수들이다. 8자리 중  $2^i$  자리에 나타나는 1을 모두 합해보자. 그런 수는 나머지 7자리 중 짝수 곳에 1이 나타나야 하므로 모두  $\binom{7}{0} + \binom{7}{2} + \binom{7}{4} + \binom{7}{6} = 64$  개 있다. 따라서, 1이 홀수 번 나타나는 수들의 각 자리의 1을 모두 합하는 것은  $64(1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^7) = 64(2^8 - 1)$  과 같다. 256도 1이 홀수 번 나타나는 수이므로 함께 합하면  $64(2^8 + 2^2 - 1)$ . 즉 구하는 홀수는  $2^8 + 2^2 - 1 = 259$  ... **답** ◇

**풀이3 (서울 환일고 2학년 김태우, 수정됨)** 문제에 0을 포함시켜도 상관없고, 256은 일단 제외하여 8자리까지의 수들만 먼저 생각하자. 2자리 이하의 모든 수 0, 1, 2, 3 중에서 1이 홀수 번 나타나는 수들(1과 2)과 1이 짝수 번 나타나는 수들(0과 3)은 그 개수와 합이 모두 같음을 관찰하자. 그럼 8자리 이하의 수  $\square\square\square\square\square\square\triangle\triangle$ 에서 앞의 6자리  $\square$ 들이 정해져 있고 뒤의 2자리  $\triangle$ 들만 변한다고 할 때, 이런 수들 중 1이 홀수 번 나타나는 수들의 합과 1이 짝수 번 나타나는 수들의 합은 언제나 같다. 따라서, 8자리 이하의 모든 수 중에서도 1이 홀수 번 나타나는 수들의 합과 1이 짝수 번 나타나는 수들의 합은 같다. 따라서, 256 이하의 음이 아닌 정수 중 이진법으로 1이 홀수 번 나타나는 수들의 합은  $\frac{1}{2}(0 + 1 + 2 + \dots + 255) + 256 = \frac{255 \cdot 256}{4} + 256 = 259 \cdot 64$ . 구하는 가장 큰 홀수는 ... **답** 259 ◇

## KMO 2005-R1-H12

서로 다른 세 개의 복소수  $a$ 와  $b$ 와  $c$ 에 대하여,  $a^3 = 20a^2 + b^2 + c^2 - a - 340$ ,  $b^3 = 20b^2 + c^2 + a^2 - b - 340$ ,  $c^3 = 20c^2 + a^2 + b^2 - c - 340$  일 때,  $abc$ 의 값을 구하여라.

**풀이** (과천고 1학년 홍성준)  $a, b, c$ 의 값이 주어지면  $a^2 + b^2 + c^2 = K$ 의 값도 정해진다. 이 때,  $a, b, c$ 는 3차 방정식  $x^3 = 19x^2 - x + K - 340$ 의 세 근이 된다. 근과 계수와의 관계에 의해

$$a + b + c = 19, \quad ab + bc + ca = 1, \quad abc = K - 340$$

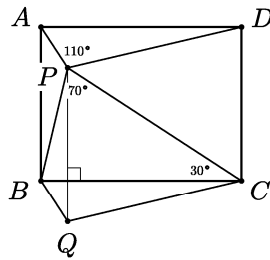
여기서  $K = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca) = 359$  이므로  $abc = 359 - 340 = 19 \dots$  **답**

◇

### KMO 2005-R1-H13

직사각형  $ABCD$ 의 내부의 점  $P$ 에 대하여,  $\angle APD = 110^\circ$ ,  $\angle BPC = 70^\circ$ ,  $\angle PCB = 30^\circ$ 이다.  $\angle PAD$ 의 크기를 구하여라.

**풀이**  $\triangle APD$ 를 평행이동하여  $\triangle QBC$ 가 되게 하자.



그럼  $\angle BPC + \angle BQC = 70^\circ + 110^\circ = 180^\circ$  이므로  $\square PBQC$ 는 원에 내접하는 사각형. 원주각에 의해  $\angle PQB = \angle PCB = 30^\circ$ .  $PQ \perp BC$  이므로  $\angle PAD = \angle QBC = 60^\circ \dots$  **답** ◇

### KMO 2005-R1-H14

양의 정수  $n$ 에 대하여,  $2n$  자리수  $a = (a_1 a_2 \cdots a_n a_{n+1} \cdots a_{2n})_{(10)}$  을 생각하자. 이 수에 대하여,  $2n$  자리수  $b$ 를  $b = (a_{n+1} a_{n+2} \cdots a_{2n} a_1 \cdots a_n)_{(10)}$  이라 정의하면  $3a = 4b$  를 만족시킨다고 한다. 이러한 성질을 만족시키는 양의 정수  $a$  가운데 두 번째로 작은 것을  $A$ 라 할 때,  $7A$ 의 각 자리의 숫자의 합을 구하여라. (단,  $a = (\cdots)_{(10)}$  은  $a$ 의 10진법 표현을 나타낸다.)

**풀이** (인천 광성중 1학년 이원열, 조금 수정)  $c = (a_1 a_2 \cdots a_n)_{(10)}$ ,  $d = (a_{n+1} a_{n+2} \cdots a_{2n})_{(10)}$ 이라 하자. 그럼  $a = c \cdot 10^n + d$ ,  $b = d \cdot 10^n + c$ 가 된다.  $3a = 4b$  이므로

$$(3 \cdot 10^n - 4)c = (4 \cdot 10^n - 3)d$$

이다. 만일  $3 \cdot 10^n - 4$  와  $4 \cdot 10^n - 3$  이 서로 소이면  $(3 \cdot 10^n - 4) \mid d$  로  $d$ 가  $n$ 자리 수를 넘어서게 되어 안 된다. 그런데  $-4(3 \cdot 10^n - 4) + 3(4 \cdot 10^n - 3) = 7$  이므로 서로 소가 아니라면 최대공약수가 7이 되어야 한다. 즉,  $4 \cdot 10^n \equiv 3 \pmod{7}$ . 양변에 2를 곱하면

$$10^n \equiv 6 \pmod{7}$$

이것을 만족하는  $n$ 을 구하면,  $10^6 \equiv 1$  이고  $10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5 \equiv 1, 3, 2, 6, 4, 5 \pmod{7}$  이므로,  $n \equiv 3 \pmod{6}$ . 즉,  $n = 3, 9, \dots$  가 된다. 그리고,

$$c = \frac{1}{7}(4 \cdot 10^n - 3)k, \quad d = \frac{1}{7}(3 \cdot 10^n - 4)k$$

가 된다. 우선  $n = 3$  일 때는  $c = 571k$ ,  $d = 428k$  인데 3자리의 수로는  $k = 1$  일 때만이 유일하다. 이제  $n = 9$  일 때 가장 작은  $a$ 를 찾으려면 되므로,  $k = 1$  일 때  $7c = 3999999997$ ,  $7d = 2999999996$ , 즉  $7A = 39999999972999999996$  이 된다. 그럼 각 자리의 숫자의 합은  $3 + 7 + 2 + 6 + 9 \cdot 8 \cdot 2 = 162 \dots$  **답** ◇

#### KMO 2005-R1-H15

좌표평면의 점  $(a, b)$ 에서 점  $(a+1, b)$ 로 이동하는 방법을  $x$ -스텝, 점  $(a, b)$ 에서 점  $(a, b+1)$ 로 이동하는 방법을  $y$ -스텝, 점  $(a, b)$ 에서 점  $(a+1, b+1)$ 로 이동하는 방법을  $d$ -스텝이라 하자. 이 세 가지 스텝만을 이용하여 점  $(0, 0)$ 에서 점  $(4, 4)$ 로 이동하는 가능한 모든 경로들에서 사용된  $d$ -스텝들의 총 횟수를 구하여라.

**풀이** (대전과학고 2학년 송지용)  $x$ -스텝,  $y$ -스텝,  $d$ -스텝을 사용한 횟수를 각각  $X$ ,  $Y$ ,  $D$ 라 하자. 그럼  $(X, Y, D) = (4, 4, 0), (3, 3, 1), (2, 2, 2), (1, 1, 3), (0, 0, 4)$  등의 경우가 있다. 각 경우에서, 각 스텝이 사용된 순서를 나열하는 것이므로, 구하는 경우의 수는 각각  $\frac{(4+4+0)!}{4!4!0!}$ ,  $\frac{(3+3+1)!}{3!3!1!}$ ,  $\frac{(2+2+2)!}{2!2!2!}$ ,  $\frac{(1+1+3)!}{1!1!3!}$ ,  $\frac{(0+0+4)!}{0!0!4!}$  가지가 된다. 각각에서  $d$ -스텝이 사용된 횟수는 0,  $1 \cdot 140$ ,  $2 \cdot 90$ ,  $3 \cdot 20$ ,  $4 \cdot 1$  이므로, 이것을 모두 합하면  $0 + 140 + 180 + 60 + 4 = 384 \dots$  **답** ◇

#### KMO 2005-R1-H16

2005 이하의 양의 정수  $n$  중에서  $2n^2 + 3n + 1$  과  $3n^2 + 2n + 3$  이 서로 소가 되도록 하는 것들의 개수를 구하여라.

**풀이** (김대성)  $A, B$ 의 최대공약수를  $(A, B)$ 로 쓰겠다. 유클리드 호제법의 원리에 의해

$$1 = (2n^2 + 3n + 1, 3n^2 + 2n + 3) = (2n^2 + 3n + 1, n^2 - n + 2) = (5n - 3, n^2 - n + 2)$$

여기서  $5n - 3$  은 5와 서로 소이므로

$$= (5n - 3, 5n^2 - 5n + 10) = (5n - 3, -2n + 10) = (n + 17, -2n + 10) = (n + 17, 44)$$

이것이 서로 소이므로,  $n + 17$  은 2와 11의 배수가 아니다. 즉,  $n$ 은 짝수이고,  $n = 11k + 5$  꼴이 아니다. 짝수는 모두 1002개 있는데, 그 중  $11k + 5$  꼴, 즉  $22k' + 16$  꼴은 91개 있으므로, 구하는 개수는  $1002 - 91 = 911$  ... **답** ◇

**별해** (과천고 1학년 홍성준)  $2n^2 + 3n + 1 = (2n + 1)(n + 1)$  이므로  $3n^2 + 2n + 3$  이  $2n + 1, n + 1$  과 모두 서로 소이면 된다. 유클리드 호제법의 원리에 의해

$$1 = (n + 1, 3n^2 + 2n + 3) = (n + 1, n - 3) = (n + 1, 4)$$

$$1 = (2n + 1, 3n^2 + 2n + 3) = (2n + 1, 6n^2 + 4n + 6) = (2n + 1, n + 6) = (11, n + 6)$$

첫 번째 결과에서  $n$ 은 짝수이고, 두 번째 결과에서  $n$ 은  $11k + 5$  꼴이 아니다. 이것을 세면 위의 풀이에서와 결과가 같다. ◇

#### KMO 2005-R1-H17

이차방정식  $(bc - 1)x^2 + (a - b + c - abc)x + ab - 1 = 0$  이 정수근을 갖도록 하는 한 자리의 양의 정수  $a, b, c$ 에 대하여  $100a + 10b + c$ 의 최대값을 구하여라.

**풀이** (제주과학고 1학년 강진호, 수정됨)

정수계수 이차방정식이므로 정수근을 갖는다면 판별식이 완전제곱수라야 한다.

$$\begin{aligned} D &= (a - b + c - abc)^2 - 4(bc - 1)(ab - 1) \\ &= a^2b^2c^2 - 2abc(a + b + c) + (a^2 + b^2 + c^2) + 2(ab + bc + ca) - 4 \\ &= (abc)^2 - 2(abc)(a + b + c) + (a + b + c)^2 - 4 \\ &= (a + b + c - abc)^2 - 4 = m^2 \end{aligned}$$

즉,  $(a + b + c - abc)^2 - m^2 = 4$  이다. 완전제곱수들 0, 1, 4, 9, 16, ... 의 분포를 관찰하면 두 완전제곱수의 차가 4가 되는 경우는  $4 - 0$  일 때뿐이다. 따라서,  $m = 0$  이고

$$a + b + c - abc = \pm 2 \quad (*)$$

이다. 그럼  $a(bc - 1) = b + c \pm 2$ , 즉

$$bc - 1 \mid b + c \pm 2$$

이다.  $b + c \pm 2 = 0$  일 때는  $bc - 1 = 0$  이기도 하므로,  $bc - 1 \leq b + c \pm 2$  이 항상 성립한다. 즉,

$$(b - 1)(c - 1) \leq 4$$

이다. (\*)은 대칭식이므로, 마찬가지로

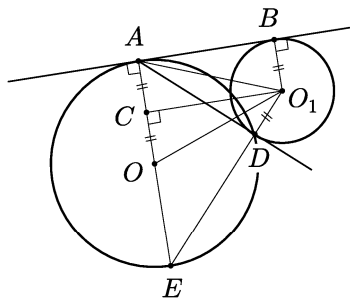
$$(a - 1)(b - 1) \leq 4, \quad (a - 1)(c - 1) \leq 4$$

이기도 하다.  $a > 5$  이면  $b = c = 1$  이어야 하므로 문제의 식에서 최고차항이 0이 되어 이차방정식이 아니므로 곤란하다.  $a = 5$  일 때는  $b - 1, c - 1 \leq 1$  이고, 이 경우  $(a, b, c) = (5, 2, 1)$  또는  $(5, 1, 2)$ 일 때 (\*)이 만족된다.  $(a, b, c) = (5, 2, 1)$  일 때 문제의 방정식은  $x^2 - 6x + 9 = 0$  으로  $x = 3$  의 정수근을 갖는다. 따라서,  $100a + 10b + c$  의 최대값은 521이다. ◇

#### KMO 2005-R1-H18

중심의  $O$ 이고 반지름의 길이가  $16\sqrt{2}$  인 원과 중심이  $O_1$ 이고 반지름의 길이가  $8\sqrt{2}$  인 원이 두 점에서 만난다. 두 원의 공통접선  $\ell$ 이 원  $O$ 와 점  $A$ 에서 접하고 원  $O_1$ 과 점  $B$ 에서 접한다. 두 원의 교점 중에서 공통접선  $\ell$ 에서 더 멀리 떨어져 있는 점에서의 원  $O_1$ 의 접선이  $A$ 를 지난다고 할 때, 선분  $OO_1$ 의 길이를 구하여라.

**풀이** (대전과학고 1학년 김두리)  $O_1$ 에서  $AO$ 에 내린 수선의 발을  $C$ , 문제에서 제시된 두 원의 교점 하나를  $D$ , 원  $O$ 에서  $A$ 의 대칭점을  $E$ 라 하자.



$AC = CO (= 8\sqrt{2})$  이므로  $O_1AO$ 는 이등변삼각형.  $\angle CAO_1 = \angle AO_1B = \angle AO_1D$  이므로  $EAO_1$ 도 이등변삼각형이고,  $\triangle EAO_1 \sim \triangle O_1AO$ . 즉,  $EA : AO_1 = OO_1 : AO$  이고  $AO_1 = OO_1$  이므로  $OO_1^2 = EA \cdot AO = 32\sqrt{2} \cdot 16\sqrt{2} = 32^2$ .  $\therefore OO_1 = 32 \dots$  **답** ◇

#### KMO 2005-R1-H19

1번부터 2005번까지 번호가 매겨진 2005개의 카드를 1번 카드가 맨 위, 그 아래 2번 카드, 그 아래 3번 카드, ..., 2005번 카드가 맨 아래에 오도록 쌓은 카드 더미가 있다. 이제, 2005번 카드부터 시작하여 카드 더미의 맨 아래의 카드는 버리고, 다음 카드는 카드 더미의 맨 위로 보내고, 다시 맨 아래의 카드는 버리고, 다음 카드는 카드 더미 맨 위로 보내는 식의 작업을 계속하기로 하자. 마지막에 남은 카드의 번호를 구하여라.

**풀이** (KAIST 과학영재센터 연구원 고봉균) 카드의 번호를 1씩 줄여 0번부터 2004번까지의 카드로 생각하고, 이 때 카드가 0번부터  $n$ 번까지일 때 마지막에 남은 번호를  $h(n)$ 이라 하자.

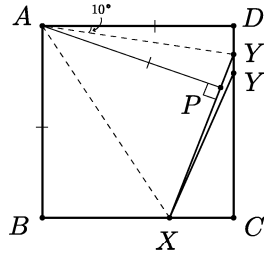
- $n = 2m + 1$  일 때;  $0\ 1\ 2\ \cdots\ 2m\ 2m + 1$  에서  $m + 1$  번 시행하면  $0\ 2\ \cdots\ 2m - 2\ 2m$  이 된다. 다시  $2m$ 부터 버리기 시작하므로 이것은 0번부터  $m$ 번까지의 카드로 시작하는 것과 같고 그럼  $h(m)$ 번 카드가 마지막에 남는다.  $i$ 번 카드는  $2i$ 이므로,  $h(2m + 1) = 2h(m)$ .
- $n = 2m$  일 때;  $0\ 1\ 2\ \cdots\ 2m - 1\ 2m$  에서  $m$ 번 시행하면  $1\ 3\ \cdots\ 2m - 3\ 2m - 1\ 0$  이 된다. 0은 버려질 카드이므로  $2m + 1$  이 대신 있는 것으로 생각해도 되고, 그럼 0번부터  $m$ 번까지의 카드로 시작하는 것과 같으므로  $h(m)$ 번 카드가 마지막에 남는다. 여기서  $i$ 번 카드는  $2i + 1$  이므로  $h(2m) = 2h(m) + 1$ .

따라서,  $h(n)$ 은  $h(0) = 0$ ,  $h(2m) = 2h(m) + 1$ ,  $h(2m + 1) = 2h(m)$  의 점화식을 갖는다. 2진법으로 생각하면,  $n \geq 1$  일 때  $h(n)$ 은  $n$ 을 이진법으로 전개한 후 각 자리의 1은 모두 0으로, 0은 모두 1로 바꿔놓는 함수가 된다. 따라서,  $h(2004) = h(11111010100_{(2)}) = 101011_{(2)} = 43$  이고, 원래의 문제로 다시 옮기면 마지막에 남은 카드의 번호는 44가 된다. ... **답** 44 ◇

#### KMO 2005-R1-H20

한 변의 길이가 1인 정사각형  $ABCD$ 에서 점  $X (\neq C)$  는 변  $BC$  위의 점이고 점  $Y (\neq C)$  는 변  $CD$  위의 점이라 하자. 삼각형  $XCY$ 의 둘레의 길이가 2이고,  $\angle DAY = 10^\circ$  이다.  $\angle YXC$ 의 크기를 구하여라.

**풀이**  $AX$ 를 접어올린  $B$ 의 대칭점  $P$ 를 잡자. 그리고,  $\angle DAP$ 의 이등분선이  $CD$ 와 만나는 점을  $Y'$ 이라 하자.



$\angle APX = \angle APY' = \angle R$  이므로  $XPY'$ 은 일직선을 이루고,

$$s(\triangle XCY') = BC + CD = 2 = s(\triangle XCY)$$

가 된다. 단,  $s(E)$ 는 도형  $E$ 의 둘레의 길이를 나타낸다.  $Y'$ 이  $Y$ 보다 높거나 낮다면  $\triangle XCY'$ 의 둘레가  $\triangle XCY$ 의 둘레보다 더 길거나 짧으므로,  $Y'$ 과  $Y$ 는 동일한 점이어야 한다. 그럼  $\angle YXC = \angle PAB = 90^\circ - \angle DAP = 70^\circ \dots$  **답** ◇



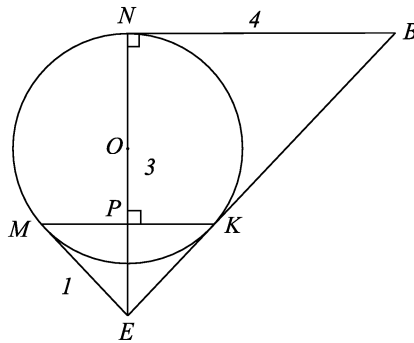
## 2006년 한국 수학올림피아드 풀이

중등부

## KMO 2006-R1-M1

점  $B$ 에서 중심이  $O$ 인 원에 그은 두 접선의 접점이 각각  $N$ ,  $K$ 이다. 선분  $NO$ 의 연장선과 선분  $BK$ 의 연장선이 점  $E$ 에서 만나고, 점  $E$ 에서 이 원에 그은 또 다른 접선의 접점이  $M$ 이다.  $BN = 4$ ,  $NE = 3$  일 때,  $5KM$ 의 값을 구하여라.

풀이 (전남과학고 1학년 김재강)



$BN = 4$ ,  $NE = 3$  이므로  $BE = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$ .  $BK = BN = 4$  이므로  $EK = 1$ .  
 $\triangle EBN \sim \triangle EKP$  이고 닮음비가  $5 : 1$  이므로  $PK = \frac{4}{5}$ ,  $KM = 2 \cdot PK = \frac{8}{5}$ .  $\therefore$   
 $5KM = 8 \quad \dots$  **답** ◇

## KMO 2006-R1-M2

정수  $2006^{2006}$ 을 100으로 나눈 나머지를 구하여라.

**풀이** (김해고 1학년 장현규)

2006은 100으로 나눈 나머지가 6과 같으므로  $6^{2006}$ 을 100으로 나눈 나머지와 같다. 6은

자신을 거듭제곱하면 1의 자리가 항상 6이다.

$$(6 \bmod 100) = 6$$

$$(36 \bmod 100) = 36$$

$$(216 \bmod 100) = 16$$

$$(96 \bmod 100) = 96$$

$$(576 \bmod 100) = 76$$

$$(456 \bmod 100) = 56$$

$$(336 \bmod 100) = 36$$

36이 다시 나왔으므로 5의 주기를 갖는 반복 구간을 찾았다.  $6^n$ 에 대한 수열을  $a_n$ 이라고 정의할 때에 수열은 다음 조건을 만족한다.

$$a_n = a_{n+5k} \quad (n \geq 2, n, k \in \mathbb{N})$$

$$\text{즉 } a_{2006} = a_{2001} = \cdots = a_6 = 56 \quad \cdots \quad \text{답}$$

◇

### KMO 2006-R1-M3

방정식  $x^2 - \left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{x}{3}\right] - \left[\frac{x}{6}\right] = 2451$ 의 모든 정수해의 합을 구하여라. (단,  $[x]$ 는  $x$ 보다 크지 않은 최대 정수를 나타낸다.)

#### 풀이 (경남과학고 2학년 신훈)

$x^2 - \left[\frac{x}{2}\right] - \left[\frac{x}{3}\right] - \left[\frac{x}{6}\right] = 2451$ 에서  $\frac{x}{2} + \frac{x}{3} + \frac{x}{6} = x$ 라는 점에 초점을 맞춰서 풀자. 잉여계를 이용해  $x$ 를 6으로 나눈 나머지에 따라 분류하자.

$x = 6k$ 라 하면  $x^2 - x = 2451$ ,  $x^2 - x - 2451 = 0$ 인데 정수해를 갖지 않는다.

$x = 6k + 1$ 이면  $x^2 - (x - 1) = 2451$ ,  $x^2 - x - 2450 = 0$ ,  $(x - 50)(x + 49) = 0$ 인데,  $x = 6k + 1$ 꼴이므로 해는 없다.

$x = 6k + 2$ 이면  $x^2 - x - 2450 = 0$ ,  $(x - 50)(x + 49) = 0$ 이고,  $x = 6k + 2$ 꼴이므로  $x = 50$ .

$x = 6k + 3$ 이면,  $x^2 - x - 2450 = 0$ ,  $(x - 50)(x + 49) = 0$ 에서  $x = 6k + 3$ 꼴이므로 해는 없다.

$x = 6k + 4$ 이면, 역시  $x^2 - x - 2450 = 0$ ,  $(x - 50)(x + 49) = 0$ 이고 역시 해는 없다.

$x = 6k + 5$ 이면,  $x^2 - x - 2449 = 0$ 인데 정수해를 갖지 않는다.

$\therefore$  만족하는 정수해는 50밖에 없다.  $\cdots$  답 50

◇

**KMO 2006-R1-M4**

정수 0과 1을 중복하여 8번 써서 만든 것을 ‘코드’라 하고, 코드  $A$ 에 대하여  $A$ 에 나타나는 1의 개수를  $f(A)$ 라 하자. 예를 들어, 01000110, 11111111, 00000000 등은 코드이고,  $f(01000110) = 3$ ,  $f(11111111) = 8$ ,  $f(00000000) = 0$  이다. 서로 다른 230개의 코드  $A_1, A_2, \dots, A_{230}$  을 마음대로 만들 때

$$f(A_1) + f(A_2) + \dots + f(A_{229}) + f(A_{230})$$

의 최대값을 구하여라.

**풀이 (서울 경희중 3학년 송은호)**

가능한 모든 코드 수가 256개인데, 230개를 고르는 것보다는 26개를 배제하는 것이 쉽다. 1이 가장 적게 들어간 26개의 코드를 찾자.

| 1의 개수 | 해당 코드 수                     | 총 1의 수     |
|-------|-----------------------------|------------|
| 0     | 1                           | 0          |
| 1     | $\binom{8}{1} = 8$          | 8          |
| 2     | $\binom{8}{2} = 28$ (선택:17) | 56 (선택:34) |

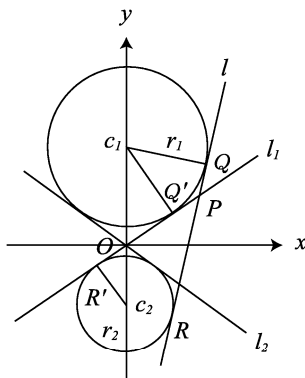
256개의 코드에 포함된 모든 1의 개수는  $256 \times 8 \div 2 = 1024$ 개이다. (전체 코드에 포함된 1과 0의 개수는 같다.) 배제해야하는 1의 개수는 42개이므로 구하는 최대값은 982  
 ... **답** ◇

**KMO 2006-R1-M5**

두 직선  $l_1 : y = \frac{1}{\sqrt{3}}x$  와  $l_2 : y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x$  에 대하여, 직선  $l$ 이 직선  $l_1$ 과는 제1사분면에서 만나고 직선  $l_2$ 와는 제4사분면에서 만난다. 세 직선  $l, l_1, l_2$  모두와 접하는 원들 중에서  $\{(x, y) : y > 0\}$  에 포함되는 것을  $C_1$ ,  $\{(x, y) : y < 0\}$  에 포함되는 것을  $C_2$ 라고 하면,  $C_1$ 의 중심과  $C_2$ 의 중심과의 거리가 20이다.  $l$ 과  $l_1$ 과의 교점을  $P$ ,  $l$ 과  $C_1$ 과의 접점을  $Q$ ,  $l$ 과  $C_2$ 와의 접점을  $R$ 이라고 할 때,  $|PR - PQ|$ 의 값을 구하여라.

**풀이** (광주 동성고 3학년 방재혁)

다음과 같이 그림을 그릴 수 있다.



직선  $l_1$ 과 직선  $l_2$ 에 동시에 접하므로 두 원의 중심은  $y$ 축 위에 있다.  $C_1, C_2$ 의 반지름을 각각  $r_1, r_2$ 라고 하자. 또  $C_1, C_2$ 와  $l_1$ 의 접점을 각각  $Q', R'$ 이라 하자.  $PR = PR', PQ = PQ'$  이므로,

$$PR - PQ = PR' - PQ' = Q'R'$$

이다.  $\angle C_1 O Q' = \angle C_2 O R' = 60^\circ$  이고,  $\triangle C_1 O Q', \triangle C_2 O R'$ 는 직각삼각형이므로,  $OQ' = OC_1 \cos 60^\circ = \frac{1}{2}OC_1, OR' = OC_2 \cos 60^\circ = \frac{1}{2}OC_2$  이고,

$$\therefore Q'R' = OQ' + OR' = \frac{1}{2}(OC_1 + OC_2) = \frac{1}{2}C_1 C_2 = 10$$

... **답** 10

◇

**KMO 2006-R1-M6**

양의 정수  $A$ 를 8진법의 수로 나타내었더니  $(a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1)_8$  ( $a_n \neq 0$ ) 이고  $2A$ 를 8진법의 수로 나타내었더니  $(a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n)_8$  이 되었다.  $a_2$ 의 값이 될 수 있는 수를 모두 합하면 얼마인가?

**풀이** (성남 은행중 3학년 최한음)

$a_1, a_2, a_3, \dots$  는 모두 8진법의 수들이므로

$$a_1 = (ABC)_2, \quad a_2 = (DEF)_2, \quad a_{n-1} = (cde)_2, \quad a_n = (mab)_2$$

라 하자. 이 때

$$(a_n a_{n-1} \cdots a_2 a_1)_8 = (mab cde \cdots DEF ABC)_2$$

$$(a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n)_8 = (ABC DEF \cdots cde mab)_2$$

이다. 밑식이 윗식의 2배이므로 위의 식을 왼쪽으로 한 칸씩 이동한 것이다. 즉,  $m = 0$  이고,

$$\begin{array}{cccccccccccc} a & b & c & d & e & & \cdots & E & F & A & B & C & 0 \\ A & B & C & D & E & F & \cdots & c & d & e & 0 & a & b \end{array}$$

이 같은 수이다. 여기서  $B = b = 0$  임을 바로 알 수 있고,  $a_n = (mab)_2 = (0a0)_2 \neq 0$  이어야 하므로  $a = 1$  이다.

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 0 & c & d & e & & \cdots & E & F & A & 0 & C & 0 \\ A & 0 & C & D & E & F & \cdots & c & d & e & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

그럼 이로부터 또 위의 표에서  $A = C = 1$  임을 알 수 있다.

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 0 & c & d & e & & \cdots & E & F & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & D & E & F & \cdots & c & d & e & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

이런 식으로 계속하면,  $c = e = 1$ , 또  $E = 1$ , 그리고  $D = F = d$  가 된다.

$$\begin{array}{cccccccccccc} 1 & 0 & 1 & d & 1 & & \cdots & 1 & d & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & d & 1 & d & \cdots & 1 & d & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array}$$

- (i)  $d = 0$  일 때:  $D = F = d = 0$  이므로  $a_2 = (DEF)_2 = (010)_2 = 2$  가 된다. 실제로,  $A = (2525)_8$  일 때  $2A = (5252)_8$  로  $a_2 = 2$  가 될 수 있다.
- (ii)  $d = 1$  일 때:  $D = F = d = 1$  이므로  $a_2 = (DEF)_2 = (111)_2 = 7$  이 된다. 실제로,  $A = (2775)_8$  일 때  $2A = (5772)_8$  로  $a_2 = 7$  이 될 수 있다.

그러므로,  $a_2$ 로 될 수 있는 값은 2와 7이고, 그 합은  $2 + 7 = 9 \cdots$  **답**

◇

**KMO 2006-R1-M7**

두 실수  $x, y$ 가

$$2x^2 - 15x + 26 \leq y \leq x^2 - 8x + 20$$

을 만족시킬 때,  $4(x^2 + y)$ 의 최대값과 최소값의 합을 구하여라.

**풀이** (한국과학영재학교 1학년 김민기)

우선  $2x^2 - 15x + 26 \leq x^2 - 8x + 20$  이어야 한다.  $x^2 - 7x + 6 \leq 0$ ,  $(x - 6)(x - 1) \leq 0$ , 즉

$$1 \leq x \leq 6$$

이다. 이제 준식을 변형하면

$$\begin{aligned} 3x^2 - 15x + 26 &\leq x^2 + y \leq 2x^2 - 8x + 20 \\ 4(3x^2 - 15x + 26) &\leq 4(x^2 + y) \leq 8(x^2 - 4x + 10) \end{aligned}$$

이고, 이 식은 원래의 식과 동치이다. 여기서 좌변과 우변은 각각

$$\begin{aligned} L &= 12x^2 + 20x + 104 & R &= 8(x-2)^2 + 48 \\ &= 12\left(x - \frac{5}{2}\right)^2 + 29 \geq 29 \text{ (최소)} & &\leq 176 \text{ (} x=6 \text{ 일 때 최대)} \end{aligned}$$

이 된다. 실제로 등호가 성립하는 경우를 구하면  $(x, y) = (\frac{5}{2}, 1), (6, 8)$  일 때  $4(x^2 + y) = 29, 176$ 이 되므로 이것이 틀림없는 최소값과 최대값이다. 따라서, 구하는 합은  $29 + 176 = 205 \dots$  **답** ◇

Ⓜ  $2x^2 - 15x + 26 \leq x^2 - 8x + 20$  을 만족하는 영역의 그래프를 그려 풀 수도 있다.

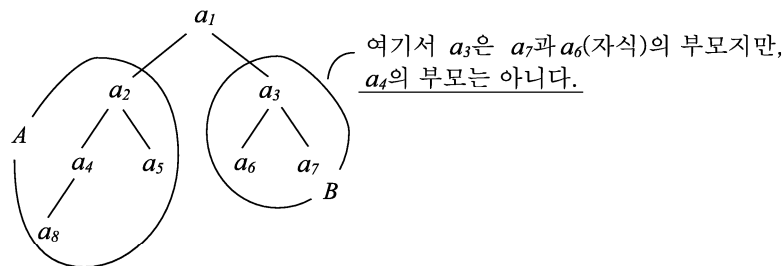
#### KMO 2006-R1-M8

정수 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8로 만든 순서쌍  $(a_1, a_2, \dots, a_8)$ 들 중 다음 세 조건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구하여라.

- (1)  $\{a_1, a_2, \dots, a_8\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ .
- (2)  $a_i > a_{2i}, (1 \leq i \leq 4)$ .
- (3)  $a_i > a_{2i+1}, (1 \leq i \leq 3)$ .

**풀이** (서울 경희중 3학년 송은호, 수정됨)

문제의 조건은 아래와 같은 tree 구조로 분석할 수 있다. 여기서 부모 node는 자식 node보다 언제나 크다(이것을 Max-heap 자료구조라 한다).



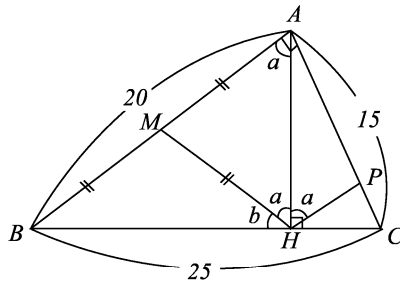
root-node인  $a_1$ 은 다른 모든 node보다 크므로 8이 된다. sub-tree A와 B는 서로 독립적이다. A와 B로 나누는 경우의 수는  $a_1$ 을 제외한 7개의 수 중에서 A에 속할 4개를 택하는 것이므로  $\binom{7}{4} = 35$ 가지(1). subtree A에서는 먼저 가장 큰 것이 자동적으로  $a_2$ 가 되고, 남은 3개 중  $a_5$ 가 될 것을 고르면  $a_4 > a_8$ 은 자동적으로 결정되므로 3가지(2). subtree B에서는 먼저 가장 큰 것이 자동적으로  $a_3$ 이 되고, 남은 2개를  $a_6$ 과  $a_7$ 로 결정하는 것이므로 2가지(3). 따라서, 전체 트리를 결정하는 가지수는 (1), (2), (3)의 곱인 210가지이다.  $\dots$  **답** 210 ◇

**KMO 2006-R1-M9**

$AB = 20$ ,  $BC = 25$ ,  $CA = 15$  인 직각삼각형  $ABC$ 에서 변  $AB$ 의 중점이  $M$ , 점  $A$ 에서 변  $BC$ 에 내린 수선의 발이  $H$ 이다. 변  $AC$  위의 점  $P$ 에 대하여  $\angle AHM = \angle AHP$  일 때,  $5AP$ 의 값을 구하여라.

**풀이** (전남과학고 1학년 강호영)

$\angle AHP = \angle MHA = \angle MAH = \angle ACH$  이므로  $\triangle AHP \sim \triangle ACH$  이고, 따라서  $HP \perp AC$  이다.



그럼 직각삼각형의 닮음에서  $AP \cdot AC = AH^2$  이고, 삼각형의 넓이에서  $AH \cdot BC = AB \cdot AC$  이므로,

$$5AP = 5 \cdot \frac{AH^2}{AC} = 5 \cdot \left( \frac{AB \cdot AC}{BC} \right)^2 \frac{1}{AC} = \frac{5 \cdot 20^2 \cdot 15}{25^2} = 48$$

... **답** 48

◇

**KMO 2006-R1-M10**

양의 정수의 집합에서 정의된 함수  $f(n)$ 은 다음 성질을 만족한다고 한다:

$$f(1) = 1, \quad f(2) = 2, \quad f(n+2) = f(n+1) + f(n)^2 + 2006 \quad (n \geq 1).$$

2006개의 정수  $f(1), f(2), \dots, f(2006)$ 들 중 7의 배수는 모두 몇 개인가?

**풀이** (광주 동성고 3학년 방재혁)

점화식을 mod 7에 대한 식으로 고치면

$$f(n+2) \equiv f(n+1) + f(n)^2 + 2006 \equiv f(n+1) + f(n)^2 + 4 \pmod{7}$$

이 점화식에 따라  $n = 1, 2, 3, \dots$  일 때  $f(n) \pmod{7}$  을 관찰하면 다음과 같이 9를 주기로 반복함을 발견할 수 있다.

| $n$             | 1  | 2  | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | ... |
|-----------------|----|----|---|---|---|---|---|---|---|----|----|-----|
| $f(n) \pmod{7}$ | (1 | 2) | 0 | 1 | 5 | 3 | 4 | 3 | 2 | (1 | 2) | ... |

따라서,  $n$ 이  $9k + 3$ 꼴일 때마다  $f(n)$ 이 7의 배수이고,  $2006 = 9 \cdot 222 + 8$  이므로  $k = 0, 1, \dots, 222$  일 때의 223번 7의 배수가 나타난다. ... **답** 223 ◇

**KMO 2006-R1-M11**

관계식  $x^2 + y^2 = 2$  를 만족시키는 실수  $x, y$ 에 대하여,  $\frac{15x^2}{2} + 4xy$  의 최대값을 구하여라.

**풀이 (KAIST 05학번 이은정)**

$y = \pm\sqrt{2-x^2}$  을  $k = \frac{15}{2}x^2 + 4xy$  에 대입하면

$$\begin{aligned} 2k - 15x^2 &= \pm 8x\sqrt{2-x^2} \\ 4k^2 - 60kx^2 + 225x^4 &= 64x^2(2-x^2) \\ 289x^4 - 2(30k+64)x^2 + 4k^2 &= 0 \end{aligned}$$

이 식을  $x^2$ 에 대한 이차방정식으로 볼 때, 실수해를 가져야 하므로 판별식이 0 이상이다. 즉,

$$\begin{aligned} D' &= (30k+64)^2 - 289 \cdot 4k^2 = (30k+64)^2 - (34k)^2 \\ &= (30k+64+34k)(30k+64-34k) = 64(k+1) \cdot (-4)(k-16) \geq 0 \end{aligned}$$

따라서,  $-1 \leq k \leq 16$  이다.  $x^2 = \frac{544}{289} (< 2)$  일 때 실제로  $k = 16$  이 성립하므로, 최대값은 ... **답** 16 ◇

**별해1 (김해 장도한)**

G.M  $\leq$  A.M 부등식에 의해

$$\frac{15}{2}x^2 + 4xy \leq \frac{15}{2}x^2 + \frac{1}{2}(x^2 + (4y)^2) = 8(x^2 + y^2) = 16$$

이다. 등호가 성립하는 경우는  $x^2 = 4y^2 = \frac{2}{5}$  이고  $xy > 0$  일 때로 존재한다. 따라서, 최대값은 16 ... **답** ◇



**별해2 (광주 동성고 3학년 방재혁)**

$x^2 + y^2 = 2$  이므로,  $x = \sqrt{2} \cos \theta$ ,  $y = \sqrt{2} \sin \theta$  로 치환하자.

$$\begin{aligned}
 \text{준식} &= \frac{15 \times 2 \cos^2 \theta}{2} + 4\sqrt{2} \cos \theta \sqrt{2} \sin \theta \\
 &= 15 \cos^2 \theta + 8 \sin \theta \cos \theta \\
 &= \frac{15(1 + \cos 2\theta)}{2} + 4 \sin 2\theta \\
 &= \frac{15}{2} + \frac{15}{2} \cos 2\theta + \frac{8}{2} \sin 2\theta \\
 &= \frac{15}{2} + \sqrt{\frac{8^2 + 15^2}{4}} \sin(2\theta + \alpha) \quad (\tan \alpha = \frac{8}{15}) \\
 &= \frac{15}{2} + \frac{17}{2} \sin(2\theta + \alpha) \leq 16
 \end{aligned}$$

즉  $2\theta + \alpha = 90^\circ$  일 때, 최대값 16을 가진다.

◇

**KMO 2006-R1-M12**

평면에 놓인 직선 위에 일정한 간격으로 8개의 점이 있다. 다음 조건을 만족시키도록 원들을 그린 것을 ‘좋은 그림’이라고 할 때, 좋은 그림은 모두 몇 가지인가?

- (1) 각 원은 어느 두 개의 점을 연결하는 선분을 지름으로 가진다.
- (2) 각 점은 한 개 또는 두 개의 원 위에 있다.
- (3) 어느 두 원이 만난다면, 이들은 외접한다.

**풀이 (경기도 일산 이동영)**

$n$ 개의 점에서의 방법을  $f(n)$ 이라 하자. 각 점 사이의 간격을 1이라 두고, 맨 마지막 점을 포함하는 원의 지름의 길이를 가지고 분류해보자.

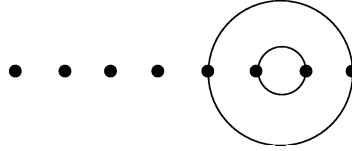
- (i) 지름이 1인 경우: 왼쪽의 원과 외접하면  $f(n-1)$ , 아니면  $f(n-2)$ . 따라서  $f(n-1) + f(n-2)$



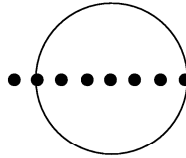
- (ii) 지름이 2인 경우: 불가능하다.



- (iii) 지름이 3인 경우 : 왼쪽의 원과 외접하면  $f(n-3)$ , 아니면  $f(n-4)$ . 따라서  $f(n-3) + f(n-4)$



- (iv) 지름이  $k$ 인 경우(단,  $3 \leq k \leq n-2$ ): 이 원의 안쪽에 점이  $k-1$ 개 있으므로 그리는 방법이  $f(k-1)$ 가지이고, 왼쪽의 원과 외접하는 경우와 아닌 경우가 있으므로  $f(k-1)\{f(n-k) + f(n-k-1)\}$ .

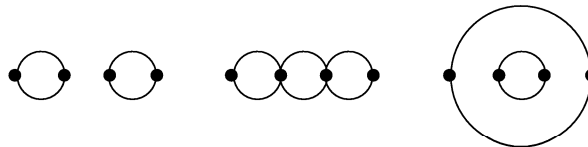


- (v) 지름이  $n-1$ 인 경우:  $f(n-2)$ 가지.

이상에서, 구하는 점화식은

$$\begin{aligned} f(n) &= f(n-1) + f(n-2) + f(n-3) + f(n-4) \\ &\quad + f(3)\{f(n-4) + f(n-5)\} + f(4)\{f(n-5) + f(n-6)\} \\ &\quad + \cdots + f(n-3)\{f(2) + f(1)\} + f(n-2) \end{aligned}$$

초항 몇 개를 구하면



$$f(1) = 0, f(2) = 1, f(3) = 1, f(4) = 3 \text{ 이므로}$$

$$f(5) = f(4) + f(3) + f(2) + f(1) + f(5-2) = 6$$

$$f(6) = f(5) + f(4) + f(3) + f(2) + f(3)\{f(2) + f(1)\} + f(6-2) = 15$$

$$\begin{aligned} f(7) &= f(6) + f(5) + f(4) + f(3) + f(3)\{f(3) + f(2)\} + f(4)\{f(2) + f(1)\} \\ &\quad + f(7-2) = 36 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f(8) &= f(7) + f(6) + f(5) + f(4) + f(3)\{f(4) + f(3)\} + f(4)\{f(3) + f(2)\} \\ &\quad + f(5)\{f(2) + f(1)\} + f(8-2) = 36 + 15 + 6 + 3 + 1(3 + 1) \\ &\quad + 3(1 + 1) + 6(1 + 0) + 15 = 91 \end{aligned}$$

... **답** 91

◇

**주 (KAIST 06학번 박준형)**

위와 같은 그림을 Catalan 분할이라 하고(접하는 경우가 없는 Catalan 분할의 개수는 Catalan number가 된다), 이 수열(Catalan 분할의 개수)을 Motzkin sum이라고 한다. 혹은 Riordan number, ring number, 또는 gamma number라고 부르기도 한다. 이 수열은

$$a_n = \frac{n-1}{n+1}(2a_{n-1} + 3a_{n-2})$$

의 점화식을 만족한다는 것이 알려져 있고 처음 몇 항은 다음과 같다.

1, 0, 1, 1, 3, 6, 15, 36, 91, 232, 603, 1585, 4213, 11298, 30537, 83097, 227475,  
625992, 1730787, 4805595, 13393689, 37458330, 105089229, 295673994, 834086421,  
2358641376, 6684761125,  
18985057351, 54022715451, 154000562758

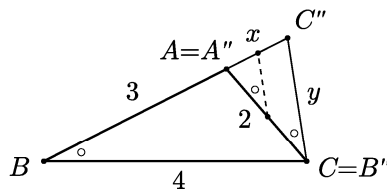
Motzkin number는 위의 수열의 이웃한 두 항의 합으로 나타난다.

**KMO 2006-R1-M13**

삼각형  $ABC$ 에서  $BC = 4$ ,  $AC = 2$ ,  $AB = 3$  이고 삼각형  $A'B'C'$ 에서  $A'B' = 1$  이다.  $\angle BAC + \angle B'A'C' = 180^\circ$  이고  $\angle ABC = \angle A'B'C'$  일 때, 삼각형  $ABC$ 의 넓이를  $S$ , 삼각형  $A'B'C'$ 의 넓이를  $S'$ 이라고 하자.  $\frac{S}{S'}$ 의 값을 구하여라.

**풀이1 (KAIST 응용수학과 05학번 이준경)**

$\triangle A'B'C'$ 을 2배 확대한 삼각형  $\triangle A''B''C''$ 을  $\triangle ABC$ 에  $AC$ 와  $A''B''$ 이 일치하도록 맞 붙이자. 그럼  $\angle A + \angle A'' = 180^\circ$  이므로  $BA(A'')C''$ 은 일직선을 이룬다.



또,  $\angle B = \angle B''$  이므로  $\triangle C''BC \sim \triangle C''B''A''$  이다.  $A''C'' = x$ ,  $B''C'' = y$  라 하면 이 닮은삼각형의 비례관계에서

$$x : y = y : x + 3 = 2 : 4$$

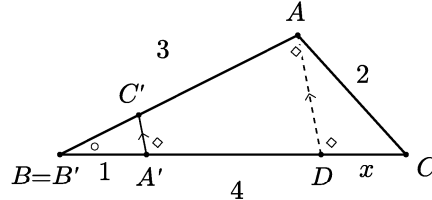
가 되고, 그럼  $y = 2x$ ,  $x + 3 = 2y$  이므로 이것을 풀면  $x = 1$  임을 알 수 있다. 따라서,  $|\triangle ABC| : |\triangle A''B''C''| = 3 : x = 3 : 1$  이고,  $|\triangle A'B'C'| = 4S'$  이므로  $S/S' = 12$  ...

**답**

◇

**풀이2 (KAIST 과학영재센터 연구원 고봉균)**

$\angle B = \angle B'$  이므로  $B$ 와  $B'$ 이 일치시키고  $C' \in AB$ ,  $A' \in BC$  가 되도록 놓자. 그리고,  $BC$  위에  $D$ 를 잡아  $AD \parallel C'A'$  이 되도록 하자.



그럼  $\angle A = 180^\circ - \angle A' = \angle C'A'C = \angle ADC$  가 되므로  $\triangle CAB \sim \triangle CDA$ . 여기서  $CD : CA = CA : CB$ , 즉  $x : 2 = 2 : 4$  이므로  $x = 1$ . 따라서,  $BD = 3$  이고  $|\triangle ABD| = \frac{3}{4}S$ .  $\triangle ABD$ 와  $\triangle C'B'A'$ 의 닮음비가  $BD : B'A' = 3 : 1$  이므로  $|\triangle A'B'C'| = \frac{1}{9}|\triangle ABD| = \frac{1}{12}S$  이다. ... **답** 12  $\diamond$

**KMO 2006-R1-M14**

양의 정수쌍  $(a, b)$ 에 대하여 유리수  $Q(a, b) = \frac{a^2b + 2ab^2 - 5}{ab + 1}$  을 생각하자. 유리수  $Q(a, b)$ 를 정수가 되게 하는 모든 양의 정수쌍  $(a, b)$ 를  $(a_1, b_1), (a_2, b_2), (a_3, b_3), \dots, (a_n, b_n)$ 이라 할 때,  $a_1 + a_2 + \dots + a_n$  의 값을 구하여라.

**풀이 (KAIST 05학번 김재덕)**

$$Q(a, b) = a + 2b - \frac{a + 2b + 5}{ab + 1}$$

이므로  $K = \frac{a+2b+5}{ab+1}$  이 정수가 되어야 한다.  $K$ 의 분모 분자가 모두 양수이므로  $a + 2b + 5 \geq ab + 1$  이고, 인수분해하면

$$(a - 2)(b - 1) \leq 6$$

$a \geq 5, b \geq 4$  이면 좌변이 9 이상이 되어 성립하지 않으므로,  $a \leq 4$  또는  $b \leq 3$  이다. 먼저  $a \leq 4$  일 때를 보면 다음과 같다.

$$a = 1 \text{ 일 때: } K = \frac{2b+6}{b+1} = 2 + \frac{4}{b+1} \text{ 이 정수이므로 } b = 1 \text{ 또는 } 3.$$

$$a = 2 \text{ 일 때: } K = \frac{2b+7}{2b+1} = 1 + \frac{6}{2b+1} \text{ 이므로 } b = 1.$$

$$a = 3 \text{ 일 때: } K = \frac{2b+8}{3b+1}, 3K = \frac{6b+24}{3b+1} = 2 + \frac{22}{3b+1} \text{ 이 정수이므로 } b = 7.$$

$$a = 4 \text{ 일 때: } K = \frac{2b+9}{4b+1}, 2K = \frac{4b+18}{4b+1} = 1 + \frac{17}{4b+1} \text{ 이므로 } b = 4.$$

다음  $b \leq 3$  일 때를 보는데,  $a \geq 5$  인 경우만 생각하면 된다.

$b = 1$  일 때:  $K = \frac{a+7}{a+1} = 1 + \frac{6}{a+1}$  이고  $a \geq 5$  이므로  $a = 5$ .

$b = 2$  일 때:  $K = \frac{a+9}{2a+1}$ ,  $2K = \frac{2a+18}{2a+1} = 1 + \frac{17}{2a+1}$  이 정수이므로  $a = 8$ .

$b = 3$  일 때:  $K = \frac{a+11}{3a+1}$ ,  $3K = \frac{3a+33}{3a+1} = 1 + \frac{32}{3a+1}$  이고  $a \geq 5$  이므로  $a = 5$ .

이상을 종합하면 해는  $(1,1), (1,3), (2,1), (3,7), (4,4), (5,1), (8,2), (5,5)$ 가 전부이고, 구하는 답은  $1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 5 + 8 = 29 \dots$  **답** ◇

#### KMO 2006-R1-M15

수직선에서 좌표가 10인 점  $P(10)$ 을 중심으로 양쪽에 대칭으로 놓여 있는 24개의 서로 다른 정수 좌표를 갖는 점  $P_1(x_1), P_2(x_2), P_3(x_3), \dots, P_{24}(x_{24})$ 에 대하여

$$(|x_1 - 1| + |x_1 + 1|) + (|x_2 - 1| + |x_2 + 1|) + \dots + (|x_{24} - 1| + |x_{24} + 1|)$$

의 최소값을 구하여라.

#### 풀이 (인천 광성중 2학년 이원열)

한 점의 좌표를  $k$ 라 하면  $P(10)$ 에 대칭인 점의 좌표는  $20 - k$ 가 된다. 이렇게 쌍으로 묶어 생각하면  $k \leq 10$  으로 둘 수 있다. 정수  $n \neq 0$  에 대해  $|n - 1| + |n + 1| = 2|n|$  이므로

(i)  $1 \leq k \leq 10$  이면:  $20 - k \geq 10$  이므로  $A = (|k-1|+|k+1|) + (|20-k-1|+|20-k+1|) = 2k + 2(20 - k) = 40$ .

(ii)  $k = 0$  이면:  $20 - k = 20$  이므로  $A = 2 + 2 \cdot 20 = 42$ .

(iii)  $k \leq -1$  이면:  $20 - k \geq 21$  이므로  $A = -2k + 2(20 - k) = 40 - 4k$ .  $k \leq -1$  이므로  $k$ 가 작아질수록  $A$ 의 값은 커지게 된다. 즉  $A \geq 44$  가 된다.

즉,  $k$ 가 클수록  $A$ 값이 작고, 가장 작은  $\frac{24}{2} = 12$ 개를 합하면  $9 \times 40 + 42 + 44 + 48 = 494 \dots$  **답** ◇

#### KMO 2006-R1-M16

철희가 어떤 모임에 나갔는데, 이 모임에 모두 631명이 참석하고 있다고 한다. 임의의 세 참석자 중에는, 서로 모르는 두 명이 반드시 있다고 한다. 만약 임의의 참석자  $A$ 와  $B$ 가 서로 모르면,  $A$ 와  $B$ 를 모두 아는 참석자가 정확히 두 명이 있다고 한다. 철희가 아는 참석자는 모두 몇 명인가?

**풀이 (KAIST 과학영재센터 연구원 고봉균)**

철희가 아는 사람의 집합을  $A$ , 모르는 사람의 집합을  $B$ 라 하자. 삼각형(서로 아는 세 명)이 생기면 안 되므로  $A$ 의 사람끼리는 서로 모른다. 서로 모르는 두 명에게는 그 둘을 아는 사람이 항상 딱 2명씩 있으므로,  $A$ 에서 임의의 두 명  $a, a'$ 을 택하면 그 둘을 아는 사람이 철희 외에  $B$ 에 딱 한 명이 있다. 그 사람을  $b$ 라 하면, 철희와  $b$ 는 서로 모르므로, 이 둘을 아는 사람이  $A$ 에 딱 두 명 있고 그 둘이 처음에 택했던  $a$ 와  $a'$ 이다. 따라서,  $A$ 에서 두 명을 고를 때마다  $B$ 의 한 명과 일대일로 대응하므로,  $\binom{|A|}{2} = |B|$  이다.  $|A| = K$ , 즉 철희가 아는 사람의 수를  $K$ 명이라 하면

$$\binom{K}{2} = 630 - K$$

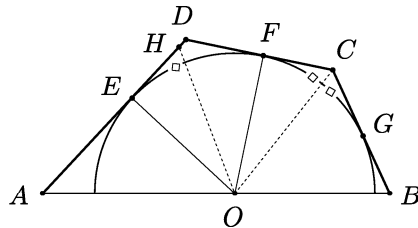
이다. 이것을 풀면,  $K(K-1) = 1260 - 2K$ ,  $K^2 + K - 1260 = 0$ ,  $(K+36)(K-35) = 0$ . 따라서,  $K = 35$  이다.

그런데, 631명 중에 누구라도 철희가 될 수 있으므로, 각자가 아는 사람이 항상  $K = 35$ 명씩 있다는 것이 된다. 각자가 아는 사람의 수를 모두 더하면, 변(서로 아는 두 명)의 개수의 2배가 되므로  $631K = 2e$  라야 한다. 그러나,  $K$ 가 홀수이므로 이것은 짝수가 될 수 없어 모순. 따라서, 문제의 조건은 성립하지 않는다. ... **답** 문제가 틀렸다 ◇

**KMO 2006-R1-M17**

원에 내접하는 사각형  $ABCD$ 에 대하여 변  $AB$  위에 중심  $O$ 를 갖는 다른 원이 사각형  $ABCD$ 의 다른 세 변  $AD, DC, CB$ 와 각각  $E, F, G$ 에서 접한다.  $FC = \sqrt{2}$ ,  $AO = 3AE$  일 때  $AE$ 의 길이를  $a$ 라고 하자.  $4a^2$ 의 값을 구하여라.

**풀이**  $\triangle OFC$ 를  $O$ 를 중심으로 회전하여  $\triangle OEH$ 가 되도록 하자.

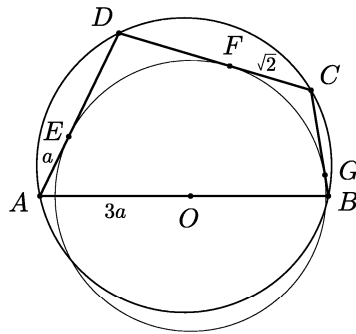


$\angle OHE = \angle OCF = \theta$  라 하면  $\angle A = 180^\circ - \angle C = 180^\circ - 2\theta$ . 따라서,  $\triangle AOH$ 는  $\angle AHO = \angle AOH = \theta$  인 이등변삼각형이고,  $AH = AO$  이다. 그럼  $\sqrt{2} = FC = EH = AH - AE = AO - AE = 2a$ . 따라서,  $4a^2 = 2$  ... **답** ◇

㉠ ‘평면기하의 아이디어’(박승동 편저, 현재는 절판됨)라는 책의 41쪽 예10에 이와 거의 똑같은 문제가 실려있다. 위의 풀이는 거기서 옮겨온 것이다. 출제가 잘못된 듯하다.

**별해** (광주 동성고 3학년 방재혁)

피타고라스의 정리에서  $OE = OF = OG = \sqrt{(3a)^2 - a^2} = 2\sqrt{2}a$ .



$\angle A = \theta$  라 하자. 사각형  $ABCD$ 가 원에 내접하므로,  $\angle C = \pi - \theta$ . 따라서  $\angle FCO = \frac{1}{2}(\pi - \theta)$ . 그러므로

$$\angle FOC = \frac{\theta}{2}$$

$\triangle AOE$ 와  $\triangle OCF$ 에서

$$\tan \theta = \frac{2\sqrt{2}a}{a} = 2\sqrt{2}$$

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{2}a} = \frac{1}{2a}$$

이것을 탄젠트 배각공식  $\tan \theta = \frac{2 \tan \frac{\theta}{2}}{1 - \tan^2 \frac{\theta}{2}}$  에 대입하면

$$2\sqrt{2} = \frac{\frac{1}{a}}{1 - \frac{1}{4a^2}} = \frac{4a}{4a^2 - 1}$$

$$4\sqrt{2}a^2 - \sqrt{2} = 2a$$

$$a^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}a - \frac{1}{4} = 0$$

$$\left(a - \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \left(a + \frac{\sqrt{2}}{4}\right) = 0$$

이 된다.  $a > 0$  이므로  $a = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . 따라서,  $4a^2 = 2 \dots$  **답**

◇

**KMO 2006-R1-M18**

적당한 정수  $m, n$ 에 대하여  $m(5m + 4n)$  꼴로 쓸 수 있는 양의 정수들 중 2006 이하인 것은 모두 몇 개인가?

**풀이 (서울 경희고 1학년 이승후)**

- (1)  $m$ 이 홀수일 때:  $5m^2 + 4mn$  은  $4k + 1$  꼴이고, 또한  $m = 1$  을 대입하면  $4k + 1$  꼴은 모두 다 됨을 알 수 있다.
- (2)  $m$ 이 짝수이고 4의 배수일 때:  $m(5m + 4n)$ 은 16의 배수이고, 또한  $m = 4$  를 대입하면  $16n + 80$  이므로 16의 배수는 모두 다 된다.
- (3)  $m$ 이 짝수이지만 4의 배수는 아닐 때:  $m(5m + 4n)$ 은 4의 배수이지만 8의 배수는 아니므로  $8k + 4$  꼴이고, 또한  $m = 2$  를 대입하면  $8n + 20$  이므로  $8k + 4$  꼴의 수는 다 된다.

총정리하면, 원하는 꼴로 쓸 수 있는 것은  $4k + 1$ ,  $8k + 4$ ,  $16k$  꼴들이다. 이 중 2006 이 아닌 것은 각각 502, 251, 125개다. 따라서 총 878개 ... **답** ◇

**KMO 2006-R1-M19**

정의역이 0 이상 11 이하인 실수들의 집합이고 함수값이 항상 0 이상인 함수  $f$ 가 다음 두 조건을 만족시킬 때,  $f(2)^2 + f(10)^2$  의 값을 구하여라.

- (1)  $f(0) = 0, f(6) = 1$ ;
- (2)  $x \geq 0, 0 \leq y, x + y \leq 11$  이면  $f(x + y) = \frac{f(x) + f(y)}{1 - f(x)f(y)}$ .

**풀이 (경남과학고 2학년 신훈)**

$f(2) = a$  라 하자. (2)에서  $f(4) = \frac{2a}{1 - a^2}$ .

$$f(6) = \frac{f(2) + f(4)}{1 - f(2)f(4)} = \frac{a + \frac{2a}{1 - a^2}}{1 - a \cdot \frac{2a}{1 - a^2}} = \frac{a - a^3 + 2a}{1 - a^2 - 2a^2} = \frac{a^3 - 3a}{3a^2 - 1}$$

(1)에서  $f(6) = 1$  이라 했으므로  $a^3 - 3a^2 - 3a + 1 = 0$ , 인수분해하면  $(a + 1)(a^2 - 4a + 1) = 0$ . 함수값이 항상 0 이상이라고 하였으므로  $a^2 - 4a + 1 = 0$  이고,  $a = 2 \pm \sqrt{3}$ . 그런데  $a = 2 + \sqrt{3}$  이면  $f(4)$ 가 음수가 되어 곤란하므로

$$a = 2 - \sqrt{3}$$

$$\text{그럼 } f(4) = \frac{2(2 - \sqrt{3})}{1 - (2 - \sqrt{3})^2} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

$$f(10) = \frac{f(4) + f(6)}{1 - f(4)f(6)} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + 1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = 2 + \sqrt{3}$$

따라서,  $f(2)^2 + f(10)^2 = (2 - \sqrt{3})^2 + (2 + \sqrt{3})^2 = 14$  ... **답** ◇



주 (KAIST 수학과 02학번 이은미)

조건 (2)에 주어진 식은  $\tan$  함수의 합각공식과 같다. 따라서,

$$f(x) = \tan \frac{\pi}{12} x$$

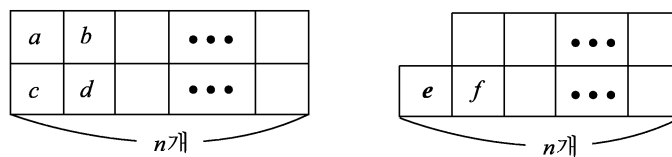
로 두면 (1), (2)의 조건을 모두 만족하는 함수가 되므로 이로부터 답을 구할 수도 있다. 단답식의 문제에서는 이것으로도 충분할 것이다. 그러나, 이것으로는 이 답이 유일한지, 다른 답도 있을 가능성은 없는지 확인할 수가 없다. 그것을 확인하려면, (1), (2)의 조건과 정의역/변역의 제한으로부터, 적어도  $x$ 가 정수(혹은 유리수)일 경우에는  $f$ 의 함수값이 유일하게 결정된다는 것을 확인해야 한다. 그럼 그 유일한 값이  $\tan$  함수에서 나오는 값과 같을 수밖에 없으니까.

KMO 2006-R1-M20

가로 5, 세로 2인 칠판이 벽에 고정되어 있다. 칠판을 여러 개의 사각형들만으로 분할한 것을 ‘그림’이라 하자. 각각의 분할된 사각형이 한 변의 길이가 1인 정사각형이거나 가로 1, 세로 2인 직사각형이거나 또는 가로 2, 세로 1인 직사각형일 때 그 그림을 ‘멋진 그림’이라 하자. 멋진 그림은 모두 몇 개인가?

풀이 (인천 광성중 2학년 이원열)

$n \times 2$  크기의 칠판에서 만들 수 있는 ‘멋진 그림’의 수를  $f(n)$ 이라 하고, 아래 그림과 같이  $(n-1) \times 2$ 에 한 개의 정사각형을 덧붙인 칠판에서 만들 수 있는 ‘멋진 그림’의 수를  $g(n)$ 이라 하자.



$f(n)$ 은 (i)  $a$ 를 정사각형으로 분할할 경우: 총  $g(n)$ 가지, (ii)  $ac$ 를 묶어 분할할 경우: 총  $f(n-1)$ 가지, (iii)  $ab$ 로 묶어 분할할 경우는  $c$ 를 정사각형으로 분할할 경우:  $g(n-1)$ 가지와  $cd$ 를 묶어 분할할 경우:  $f(n-2)$ 가지가 있다. 따라서,

$$f(n) = g(n) + f(n-1) + g(n-1) + f(n-2) \quad (n \geq 3)$$

가 된다. 비슷하게  $g(n)$ 에 대해서도  $e$ 를 기준으로 생각하면

$$g(n) = f(n-1) + g(n-1) \quad (n \geq 2)$$

이것을 이용해  $f(n)$ 을 간단히 하면

$$f(n) = 2g(n) + f(n-2)$$

$f(0) = 1, g(1) = 1, f(1) = 2$ 로 볼 수 있으므로 이 점화식으로 작은  $n$ 에 대해  $g, f$ 의 값을 구해 나가면

$$\begin{aligned} g(2) &= 1 + 2 = 3 & f(2) &= 2 \cdot 3 + 1 = 7 \\ g(3) &= 3 + 7 = 10 & f(3) &= 2 \cdot 10 + 2 = 22 \\ g(4) &= 10 + 22 = 32 & f(4) &= 2 \cdot 32 + 7 = 71 \\ g(5) &= 32 + 71 = 103 & f(5) &= 2 \cdot 103 + 22 = 228 \end{aligned}$$

문제에서 원하는 것이  $f(5)$ 이므로 ... **답** 228

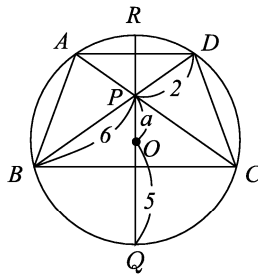
◇

## 고등부

KMO 2006-R1-H1

중심이  $O$ 이고 반지름의 길이가 5인 원에 내접하는 등변사다리꼴의 두 대각선의 교점이  $P$ 이다. 점  $P$ 에 의해 두 부분으로 나누어진 한 대각선의 긴 부분의 길이는 6, 짧은 부분의 길이는 2일 때,  $OP$ 의 길이는  $a$ 이다.  $a^2$ 의 값을 구하여라.

**풀이** (전남과학고 1학년 강석호)



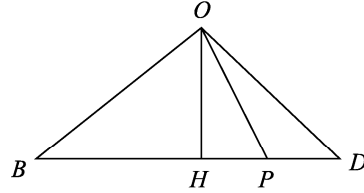
원의 성질을 이용하여

$$RP \times PQ = DP \times PB$$

$$\text{즉, } 2 \times 6 = (5 - a)(5 + a) = 25 - a^2. \quad \dots \quad \text{답 } a^2 = 13$$

◇

(주)  $\triangle OBD$ 에서 피타고라스의 정리를 이용해도 된다.



$$BD = 8, OD = OB = 5 \rightarrow OH^2 = 5^2 - 4^2 = 3^2. \quad HP = PD = 2 \rightarrow a^2 = OP^2 = OH^2 + HP^2 = 3^2 + 2^2 = 13 \quad \dots \quad \text{답}$$

### KMO 2006-R1-H2

주어진 양의 정수  $m$ 에 대하여,  $m^{1003}$ 은 77로 나눈 나머지가 19라고 한다. 정수  $m$ 을 77로 나눈 나머지를 구하여라.

**풀이**  $m^{1003} \equiv 19 \pmod{77}$  이므로

$$m^{1003} \equiv 5 \pmod{7}, \quad m^{1003} \equiv 8 \pmod{11}$$

$m$ 은 7이나 11의 배수가 아니므로, 페르마의 작은 정리에서  $m^6 \equiv 1 \pmod{7}$ ,  $m^{10} \equiv 1 \pmod{11}$ 임을 이용하면

$$m^{1003} \equiv m \equiv 5 \pmod{7}, \quad m^{1003} \equiv m^3 \equiv 8 \pmod{11}$$

$m \equiv \pm 1, \pm 2, \dots, \pm 5 \pmod{11}$ 에 따라 체크해보면  $m^3 \equiv 8 \pmod{11}$ 이 되는 것은  $m \equiv 2 \pmod{11}$ 일 때뿐이다. 따라서,

$$m \equiv -9 \pmod{7, 11} \quad \text{즉} \quad m \equiv -9 \equiv 68 \pmod{77}$$

이다.  $\dots$  **답** 68

◇

### KMO 2006-R1-H3

실수  $a, b$ 가 각각

$$a = \sum_{n=1}^{99} \frac{1}{n(n+1)^2(n+2)}, \quad b = \sum_{n=1}^{99} \frac{1}{n^2(n+1)^2(n+2)}$$

로 주어져 있다.  $3a + 2b = \frac{q}{p}$ 를 만족하는 서로 소인 양의 정수  $p, q$ 에 대하여  $q$ 를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

**풀이 (대전과학고 1학년 고기혁)**

다음과 같은 telescoping이 된다.

$$\begin{aligned}
 3a + 2b &= \sum \frac{3n+2}{n^2(n+1)^2(n+2)} \\
 &= \sum \left( \frac{1}{n^2(n+1)} - \frac{1}{(n+1)^2(n+2)} \right) \\
 &= \left( \frac{1}{1^2 \cdot 2} - \frac{1}{2^2 \cdot 3} + \frac{1}{2^2 \cdot 3} - \frac{1}{3^2 \cdot 4} + \frac{1}{3^2 \cdot 4} - \cdots - \frac{1}{100^2 \cdot 101} \right) \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1}{1010000} = \frac{505000-1}{1010000} = \frac{504999}{1010000}
 \end{aligned}$$

1010000, 504999는 서로 소이므로  $q = 504999$  를 1000으로 나눈 나머지는 999 ... **답**

◇

**KMO 2006-R1-H4**

모든 항이 정수인 등차수열  $\{a_n\}$ 들 중에서  $\{1, 1000\} \subset \{a_1, a_2, \dots, a_{10}\}$  를 만족시키는 등차수열  $\{a_n\}$ 의 개수를 구하여라.

**풀이 (광주 동성고 3학년 방재혁)**

$a_i = 1$ ,  $a_j = 1000$ 이라 하자. 단  $i$ 와  $j$ 는 1부터 10사이의 서로 다른 자연수이다. 등차수열은 단조증가 혹은 단조감소하므로(물론 일정한 경우도 있지만 여기서는 두 수(1과 1000)를 포함하므로 일정할 수 없다)  $i < j$ , 즉 단조증가인 경우에 대해 가능한 가짓수를 구하면, 대칭성에 의해  $i > j$ 인 경우의 가짓수도 정확히 같다. 공차를  $d(> 0)$ 라 하면

$$a_j - a_i = 999 = kd \quad (k = j - i)$$

이고,  $999 = 3^3 \times 37$ ,  $1 \leq k \leq 9$  이므로, 가능한  $k$ 의 값은 1, 3, 9가 전부이다.

(1)  $k = 1$  일 때:  $j = i + 1$  이고 이러한  $(i, j)$ 의 개수는 9개

(2)  $k = 3$  일 때:  $j = i + 3$  이고 이러한  $(i, j)$ 의 개수는 7개

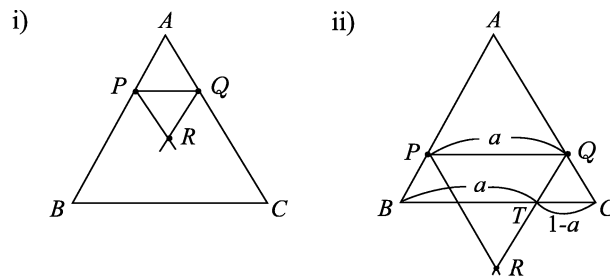
(3)  $k = 9$  일 때:  $j = i + 9$  이고 이러한  $(i, j)$ 의 개수는 1개

$i < j$  인 경우가 총 17가지이므로  $i > j$  인 경우(이 경우 공차  $d' = -d$ 가 된다)도 17가지이다.  $i, j$ 만 결정되면 수열이 항상 유일하게 결정되므로, 가능한 등차수열은 모두 ... **답** 34개 ◇

## KMO 2006-R1-H5

삼각형  $ABC$ 에 대하여, 변  $AB$  위의 한 점  $P$ 를 지나며 변  $BC$ 에 평행인 직선과 변  $AC$ 와의 교점을  $Q$ 라 하고, 또 점  $P$ 를 지나며 변  $AC$ 에 평행인 직선과 점  $Q$ 를 지나며 변  $AB$ 에 평행인 직선과의 교점을  $R$ 이라 하자. 삼각형  $ABC$ 의 넓이를  $S$ , 삼각형  $ABC$ 와 삼각형  $PQR$ 의 공통 부분의 넓이를  $T$ 라고 할 때,  $\frac{S^2}{T^2}$ 의 최소값을 구하여라.

**풀이** 넓이의 비에만 관심이 있으므로  $BC = 1$ 로 두어도 된다. 그리고,  $PQ = a$ 라 하자.



$T$ 가 가장 큰 경우를 구하면 된다.

(i) 점  $R$ 이  $\triangle ABC$  안에 있을 때( $0 \leq a \leq \frac{1}{2}$ ):

이 경우  $R$ 이  $BC$  위에 있을 때가  $T$ 가 가장 크다는 것을 쉽게 알 수 있다. 그리고, 이 최대의 경우는 (ii)에 포함되는 경우이기도 하므로 (ii)의 경우만 풀면 된다.

(ii) 점  $R$ 이  $\triangle ABC$  밖에 있을 때( $\frac{1}{2} \leq a \leq 1$ ):

$$T = \triangle ABC - (\triangle APQ + \triangle PBS + \triangle QTC)$$

$$= S - a^2 S - 2 \cdot (1-a)^2 S$$

$$\frac{T}{S} = -3a^2 + 4a - 1 = -3 \left( a - \frac{2}{3} \right)^2 + \frac{1}{3}$$

따라서,  $T/S$ 의 최대값은  $a = \frac{2}{3}$  일 때  $\frac{1}{3}$ 이다.

(i), (ii)에서  $\frac{S^2}{T^2}$ 의 최소값은 9 ... **답**

◇

## KMO 2006-R1-H6

정수  $7^{(3^{527})} - 1$ 은 정수  $3^m$ 으로 나누어진다. 이러한 성질을 만족하는 정수  $m$ 들 중 가장 큰 것을 구하여라.

**풀이 (대전과학고 1학년 고기혁)**

$3^{k(t)} \parallel 7^{3^t} - 1$ , 즉  $k(t)$ 는  $3^k \mid 7^{3^t} - 1$  인 정수  $k$  중에서 가장 큰 것이라 하자.

$$7^{3^{t+1}} - 1 = 7^{3^t \cdot 3} - 1 = (7^{3^t} - 1)(7^{3^t \cdot 2} + 7^{3^t} + 1)$$

이므로  $k(t+1) = k(t) + k'(t)$  가 된다( $k'(t) \parallel 7^{3^t \cdot 2} + 7^{3^t} + 1$ ). 우선

$$7^{3^t \cdot 2} + 7^{3^t} + 1 \equiv 1^{3^t \cdot 2} + 1^{3^t} + 1 \equiv 0 \pmod{3}$$

이고,

$$7^3 \equiv (-2)^3 = -8 \equiv 1 \pmod{9}$$

로부터

$$7^{3^t \cdot 2} + 7^{3^t} + 1 \equiv 1 + 1 + 1 = 3 \not\equiv 0 \pmod{9}$$

이 된다( $t = 0$  일 때에도  $7^{3^t \cdot 2} + 7^{3^t} + 1 = 49 + 7 + 1 = 57 \equiv 3 \pmod{9}$  이다). 즉,  $k'(t) = 1$  이고,

$$k(t+1) = k(t) + 1$$

이 된다. 따라서,

$$k(527) = k(526) + 1 = k(525) + 2 = \cdots = k(0) + 527$$

$t = 0$  일 때  $7^{3^0} - 1 = 6$  으로  $k(0) = 1$  이므로  $k(527) = 528 \cdots$  **답**

◇

**KMO 2006-R1-H7**

실수  $x, y, z$ 는  $3x + 2y + z = 1$  을 만족시킨다고 한다.

$$\frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|y|} + \frac{1}{1+|z|}$$

의 최대값을 서로 소인 양의 정수  $p, q$ 에 대하여  $\frac{q}{p}$ 로 표현할 때  $p+q$ 의 값을 구하여라.

**풀이 (분당중앙고 1학년 임동혁)**

준식을 잘 관찰해보면 분모가 최대한 작아야 최대값이 얻어짐을 알 수 있고,  $x = \frac{1}{3}$ ,  $y = z = 0$  일 때 최대가 된다는 것을 추측할 수 있다. 이렇게 추측된 부등식

$$\frac{1}{1+|x|} + \frac{1}{1+|y|} + \frac{1}{1+|z|} \leq \frac{11}{4}$$

를 증명해보자. 양변에  $4(1+|x|)(1+|y|)(1+|z|)$ 를 곱하여 전개하면

$$4(3+2|x|+2|y|+2|z|+|xy|+|yz|+|zx|) \leq 11(|xyz|+|xy|+|yz|+|zx|+|x|+|y|+|z|+1)$$

이 된다. 우변으로 넘겨서 정리하면

$$1 \leq 3|x| + 3|y| + 3|z| + 7|xy| + 7|yz| + 7|zx| + 11|xyz|$$

가 된다. 그런데,

$$1 = 3x + 2y + z \leq 3|x| + 2|y| + |z|$$

이므로 위의 부등식은 성립하게 된다. 이 때의 등호조건은  $x = \frac{1}{3}, y = z = 0$  일 때이다. 따라서,  $p + q = 4 + 11 = 15 \dots$  **답** ◇

### KMO 2006-R1-H8

함수  $f : \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$  중에서 다음 두 조건을 만족시키는 것들의 개수를  $x$ 라 할 때,  $x$ 를 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

- (1) 모든  $n$ 에 대해서  $f(n) - n$ 은 홀수이다.
- (2) 모든  $n$ 에 대해서  $f(f(n)) \neq n$ 이다.

**풀이** 조건 (1)만 생각하면 만족하는 함수들의 집합을  $U$ 라 하자. 여기서 조건 (2)를 만족하지 않는 것들을 제외할 것이다. 여기서  $f(a) = b$  이고  $f(f(a)) = a$  라면  $f(b) = a$ 가 되므로, (2)를 만족하지 않는  $n$ 은 항상 홀수와 짝수가 하나씩  $\{a, b\}$ 로 짝을 이룸을 알 수 있다. 이런 짝이  $k$ 개 있는 것들을 모은 집합을  $A_k$ 라 하자. 그럼 구하는 함수의 개수  $x$ 는 포함-배제의 원리로

$$x = |U| - |A_1| + |A_2| - |A_3|$$

이 된다(작은 최대 3개까지만 있을 수 있다). 먼저 각 홀수는 짝수에 대응되므로 3가지씩, 짝수는 홀수에 대응되므로 4가지씩 가능하여  $|U| = 3^4 4^3$ .  $|A_1|$ 은 먼저 홀수와 짝수 한 짝을 뽑아( $\binom{4}{1}\binom{3}{1} = 4 \cdot 3$ 가지) 그 짝은 서로 대응시키고, 나머지 홀수와 짝수들은 앞에서처럼 대응할 수 있는 수가 각각 3, 4가지씩 있으므로  $|A_1| = \binom{4}{1}\binom{3}{1}3^3 4^2$ 이다. 비슷하게  $|A_2|$ 와  $|A_3|$ 도 구하면

$$\begin{aligned} x &= 3^4 4^3 - \binom{4}{1}\binom{3}{1}3^3 4^2 + 2!\binom{4}{2}\binom{3}{2}3^2 4^1 - 3!\binom{4}{3}\binom{3}{3}3^1 4^0 \\ &= 3^4 4^3 - 3^4 4^3 + 2 \cdot 6 \cdot 3 \cdot 9 \cdot 4 - 6 \cdot 4 \cdot 3 \\ &= 6 \cdot 4 \cdot 3(18 - 1) = 1224 \end{aligned}$$

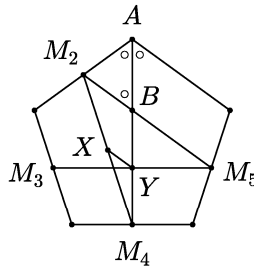
따라서,  $x$ 를 1000으로 나눈 나머지는 224  $\dots$  **답** ◇

**KMO 2006-R1-H9**

한 변의 길이가 40인 정오각형의 각 변의 중점을 시계반대방향으로 각각  $M_1, M_2, M_3, M_4, M_5$ 라 하고, 선분  $M_2M_4$ 의 중점을  $X$ , 선분  $M_3M_5$ 의 중점을  $Y$ 라고 할 때,  $(XY)^2$ 의 값을 구하여라.

**풀이** (서울 중앙중 1학년 이수홍)

$M_2M_5$ 와  $AM_4$ 의 교점을  $B$ 라 하면  $XY \parallel M_2B$  이고,



각을 계산해 보면  $\triangle M_2AB$ 가 이등변삼각형으로  $BM_2 = AM_2 = 20$  이므로, 중점연결 정리에 의해  $XY = 10$  이다. ... **답** 100 ◇

**KMO 2006-R1-H10**

(중등부 14번과 동일하므로 생략)

**KMO 2006-R1-H11**

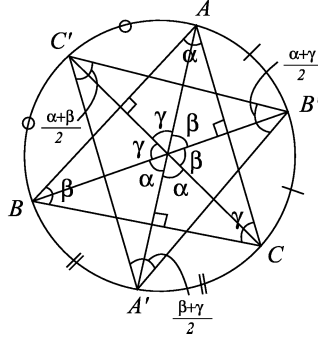
세 각의 크기가  $50^\circ, 60^\circ, 70^\circ$ 인 삼각형  $T_1$ 이 있다.  $T_1$ 의 외접원의 중심에서  $T_1$ 의 각 변에 수직하게 그은 반직선이 외접원과 만나는 세 점을 꼭지점으로 갖는 삼각형을  $T_2$ 라 하자.  $T_2$ 에 대하여 같은 방식으로  $T_3$ 을 만들고, 계속하여  $T_4, \dots, T_n$ 을 만들어나간다.  $T_n$ 의 세 내각 중 가장 작은 것의 크기를  $a_n^\circ$ 라 할 때,  $60 - a_n < \frac{1}{1000}$  을 만족시키는  $n$ 의 최소값을 구하여라.

**풀이** (대전과학고 1학년 고기혁)

세 내각이  $\alpha, \beta, \gamma$ 이고  $\alpha < \beta < \gamma$  인 삼각형  $\triangle ABC$ 에서 주어진 작업을 실행하면



$\triangle A'B'C'$ 가 만들어진다.



이 때, 세 내각을  $\alpha', \beta', \gamma'$  ( $\angle A', \angle B', \angle C'$ )이라 할 때

$$\alpha' = \frac{\beta + \gamma}{2}, \quad \beta' = \frac{\gamma + \alpha}{2}, \quad \gamma' = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

로  $\alpha' > \beta' > \gamma'$  이 된다. 만약  $\beta = 60^\circ$  였다면  $\alpha + \gamma = 120^\circ$ , 즉  $\beta' = \frac{\gamma + \alpha}{2} = 60^\circ$  로 계속 유지된다. 한편,  $\beta = 60^\circ$  일 때

$$|\beta' - \gamma'| = \frac{\gamma - \beta}{2} = \frac{\beta - \alpha}{2}$$

가 되어  $60^\circ$ 와 가장 작은 각의 차이는 절반으로 줄어든다. 즉,

$$60 - a_1 = 10$$

$$60 - a_2 = 5$$

$$\vdots$$

$$60 - a_n = \frac{10}{2^{n-1}}$$

이다.  $\frac{10}{2^{n-1}} < \frac{1}{1000}$ , 즉  $2^{n-1} > 10000$  이 되는 최소의  $n$ 은 15 ... **답**

◇

#### KMO 2006-R1-H12

$|x| + |y| + |z| + |w| \leq 10$  을 만족시키는 네 정수의 순서쌍  $(x, y, z, w)$ 의 개수를  $n$ 이라 할 때,  $n$ 을 1000으로 나눈 나머지를 구하여라.

**풀이** (과천고 2학년 홍성준)

$|x| = X, |y| = Y, |z| = Z, |w| = W$  라 하고 새로운 문자  $T$  ( $0 \leq T \leq 10$ )를 도입하여 준 부등식을

$$X + Y + Z + W + T = 10$$

으로 전환할 수 있다.  $X, Y, Z, W$  중 0의 개수에 따라 분류하자.

(i)  $X, Y, Z, W$  중에 0이 없을 때:  $T = 0$  일 수 있으므로

$$O|O|O|O|O|O|O|O|O|O|$$

의 10개의 칸막이 중에서 4개를 택하는 경우와 같다(각 칸막이 사이의  $O$ 의 개수가 차례로  $X, Y, Z, W, T$ ).  $X, Y, Z, W$ 의 부호를 바꾼 것도 모두 해가 되므로, 모두  $\binom{10}{4} \times 2^4$ 가지.

(ii)  $X, Y, Z, W$  중 0이 1개일 때: 0인 것을 제외하면 마찬가지로 해서  $\binom{10}{3} \times 2^3$ 인데, 0이 될 수를 정하는 방법  $\binom{4}{1}$ 가지이므로  $\binom{10}{3} \times 2^3 \times \binom{4}{1}$ 가지.

(iii)  $X, Y, Z, W$  중 0이 2개일 때:  $\binom{10}{2} \times 2^2 \times \binom{4}{2}$ 가지.

(iv)  $X, Y, Z, W$  중 0이 3개일 때:  $\binom{10}{1} \times 2^1 \times \binom{4}{3}$ 가지.

(v) 모두 0일 때: 1가지

(i)-(v)를 모두 합하면

$$\begin{aligned} n &= \binom{10}{4} \cdot 2^4 + \binom{10}{3} \cdot 2^3 \cdot 4 + \binom{10}{2} \cdot 2^2 \cdot 6 + \binom{10}{1} \cdot 2^1 \cdot 4 + 1 \\ &= 210 \cdot 16 + 120 \cdot 32 + 45 \cdot 24 + 10 \cdot 8 + 1 = 8361 \end{aligned}$$

따라서,  $n$ 을 1000으로 나눈 나머지는 361 ... **답**

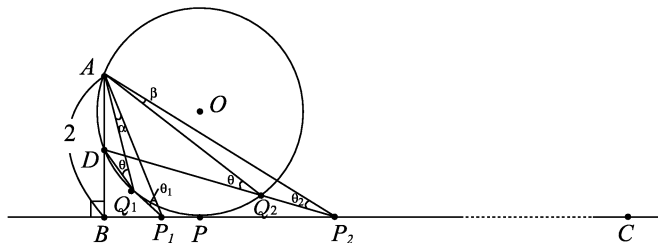
◇

#### KMO 2006-R1-H13

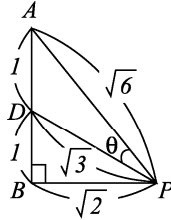
$AB = 2, BC = 100, \angle B = 90^\circ$  인 직각삼각형  $ABC$ 에서 변  $BC$  위를 움직이는 점  $P$ 가 있다. 변  $AB$ 의 중점  $D$ 에 대하여  $\angle APD$ 의 최대값을  $\theta$ 라고 할 때,  $\frac{1}{\sin \theta}$ 의 값을 구하여라.

**풀이** (대전과학고 1학년 고기혁, 수정됨)

$A, D$ 를 지나고  $BC$ 와 접하는 원을 그리고, 그 접점을  $P$ 라 하자.



$BC$  위의  $P$ 가 아닌 임의의 점  $P'$ 은 이 원 밖에 있으므로 현  $AD$ 와 이루는 각이 원주각  $\angle APD$ 보다 더 작다. 즉,  $\angle APD$ 가 최대가 되는 점은  $P$ 이다.



이 때,  $BP^2 = BD \cdot BA = 2$  이므로  $BP = \sqrt{2}$ . 피타고라스 정리에 의해  $AP = \sqrt{6}$ ,  $PD = \sqrt{3}$ .  $\triangle APD$ 의 넓이에서

$$\frac{1}{2} \sqrt{3} \sqrt{6} \sin \theta = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BP = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}$$

따라서,  $\frac{1}{\sin \theta} = 3 \dots$  **답**

◇

**KMO 2006-R1-H14**

(중등부 18번과 동일하므로 생략)

**KMO 2006-R1-H15**

(중등부 6번과 동일하므로 생략)

**KMO 2006-R1-H16**

집합  $S$ 는 1부터 11까지의 양의 정수들로 이루어진 집합이다.  $S$ 의 공집합이 아닌 부분집합들 중에서 원소들의 합을 5로 나눈 나머지가 1인 것은 모두 몇 개인가?

**풀이 (과천고 2학년 홍성준)**

간단히 세어줄 수도 있긴 하지만, 원소 개수가 많을 때를 대비하여 다르게 풀어보자.

$$f(x) = (1+x)(1+x^2)(1+x^3) \cdots (1+x^{11})$$

이라 하면 여기서 지수가  $5k+1$ 꼴인 것들의 계수합이 원하는 수이다.  $f(x) = 1 + x + x^2 + 2x^3 + \cdots + x^{66}$  인데,  $5k+1$ 꼴이 불편하므로 양변을  $x$ 로 나누고 이항하자. 즉,

$$g(x) = \frac{1}{x}(f(x) - 1) = 1 + x + 2x^2 + \cdots + x^{65}$$

에서  $x^{5k}$ 꼴의 계수합을 구한다. 이제  $\omega = e^{\frac{2}{5}\pi i}$  라 놓으면,  $\omega^5 = 1$  이고

$$1 + \omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4 = 0 \quad (1)$$

또  $x^5 - 1 = 0$  의 근이  $\omega, \omega^2, \omega^3, \omega^4, \omega^5$  이므로

$$x^5 - 1 = (x - \omega)(x - \omega^2)(x - \omega^3)(x - \omega^4)(x - \omega^5)$$

$x$ 에  $-1$ 을 대입하면

$$(1 + \omega)(1 + \omega^2)(1 + \omega^3)(1 + \omega^4)(1 + \omega^5) = 2$$

이다.  $\omega^5 = 1$  을 함께 적용하여 계산하면 이로부터

$$g(\omega) = \frac{1}{\omega}(f(\omega) - 1) = \frac{1}{\omega}((1 + \omega) \cdot 2 \cdot 2 - 1) = 3\omega^4 + 4$$

$$g(\omega^2) = 3\omega^3 + 4$$

$$g(\omega^3) = 3\omega^2 + 4$$

$$g(\omega^4) = 3\omega + 4$$

$$g(\omega^5) = \frac{1}{\omega^5}(f(\omega^5) - 1) = 2^{11} - 1$$

이것들을 모두 더하면, (1)에 의하여 지수가  $x^{5k}$ 꼴인 항만 다섯 번 더해지게 된다. 따라서, 구하는 개수를  $m$ 이라 하면

$$\begin{aligned} m &= \frac{1}{5}(g(\omega) + g(\omega^2) + g(\omega^3) + g(\omega^4) + g(\omega^5)) \\ &= \frac{1}{5}(3(\omega + \omega^2 + \omega^3 + \omega^4) + 16 + 2^{11} - 1) \\ &= \frac{1}{5}(2^{11} + 12) = 412 \end{aligned}$$

... **답** 412

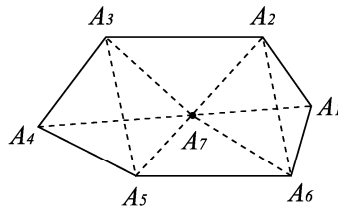
◇

#### KMO 2006-R1-H17

볼록육각형  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 에서  $A_1A_2 + A_1A_6 = 2$ ,  $A_2A_3 = 2$ ,  $A_1A_4 = 4$ , 사각형  $A_2A_3A_5A_6$ 은 평행사변형, 삼각형  $A_3A_4A_5$ 는 정삼각형이다. 이러한 볼록육각형의 넓이를  $S$ 라고 할 때,  $S$ 의 최대값과 최소값의 곱을 구하여라.

**풀이** (서울 서초동 강호)

$\square A_2A_3A_4A_7$ 이 평행사변형이 되도록  $A_7$ 을 잡으면  $\triangle A_3A_4A_5 \equiv \triangle A_2A_7A_6$ 이며,  $A_1A_7 \geq 2$  이다.



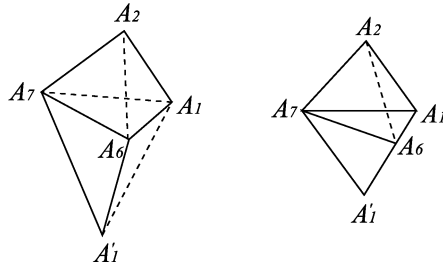
이 때, 만일 점  $A_7$ 이  $A_1A_4$  위에 있지 않으면  $A_1A_7 + A_4A_7 > A_1A_4$  이므로  $A_1A_7 > 2$  이다. 그런데  $A_1A_7 > 2$  이면,  $\triangle A_1A_2A_7$ 을 점  $A_7$ 을 중심으로 시계방향으로  $60^\circ$  회전시켰을 때

$$\angle A_7A_6A'_1 + \angle A_7A_6A_1 \neq 180^\circ \quad (*)$$

이므로

$$A_1A_2 + A_1A_6 = 2 = A'_1A_6 + A_1A_6 > A_1A'_1 = A_1A_7 > 2$$

가 되어 모순이다.



그러므로 점  $A_7$ 은  $A_1A_4$  위에 있으며  $A_2A_3 \parallel A_1A_4 \parallel A_6A_5$  이며  $\triangle A_3A_7A_5 \equiv \triangle A_2A_1A_6$  이므로 볼록육각형  $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ 의 넓이는  $\square A_1A_2A_7A_6$ 의 넓이의 3배이다. 그런데

$$\begin{aligned} \square A_1A_2A_7A_6 &= \triangle A_1A_2A_7 + \triangle A_1A_7A_6 = \triangle A'_1A_6A_7 + \triangle A_1A_7A_6 \\ &= \triangle A_1A_7A'_1 = \frac{\sqrt{3}}{4}(A_1A_7)^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \cdot 2^2 = \sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\therefore \text{최대값} \times \text{최소값} = 3\sqrt{3} \times 3\sqrt{3} = 27$$

◇

**(\*)의 증명**  $\square A_1A_2A_7A_6$ 에서

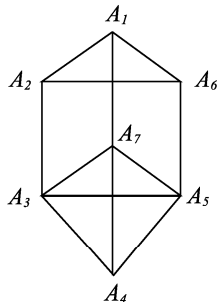
$$A_2A_7 = A_7A_6 = A_6A_2 = a, \quad A_1A_2 = x, \quad A_1A_6 = 2 - x, \quad A_1A_7 = y$$

라 하면 톨레미 정리 및 그 역정리에 의하여  $y = 2$  일 때에만

$$ax + a(2 - x) = ay$$

가 성립하여  $\square A_1A_2A_7A_6$ 가 원에 내접하는 사각형이 된다. 즉,  $y = 2$  일 때에만  $\angle A_7A_6A_1 + \angle A_7A_2A_1 = 180^\circ$  이다.  $\square$

**별해** (서울 중앙중 1학년 이수홍)



그림과 같이  $\triangle A_1A_2A_6$ 을 변  $A_2A_6$ 이  $A_3A_5$ 에 붙도록 평행이동시키자. 그리고  $A_3A_7 = x$ ,  $A_3A_4 = y$ ,  $A_7A_4 = z$  라 하면 톨레미 부등식에 의해

$$xy + (2 - x)y \geq yz$$

즉  $2 \geq z$  이다. 그리고 삼각부등식에 의해

$$A_7A_4 + A_1A_7 \geq A_1A_4$$

이므로  $z + 2 \geq 4$ , 즉  $z \geq 2$  이다. 따라서

$$z = 2$$

그리고 삼각부등식의 등호가 성립할 때이므로  $A_1, A_7, A_4$ 는 한 직선 위에 있다. 또 톨레미 부등식의 등호조건에 의해  $A_3, A_4, A_5, A_7$ 은 한 원 위에 있다. 즉

$$\angle A_3A_7A_4 = 60^\circ = \angle A_5A_7A_4$$

이다. 또  $A_2A_3 \parallel A_1A_4$  이다. 그러면 전체 육각형의 넓이는 두 사다리꼴  $A_1A_4A_3A_2$ ,  $A_1A_4A_5A_6$ 의 넓이의 합이 된다. 두 사다리꼴의 높이의 합은

$$A_3A_7 \sin 60^\circ + A_5A_7 \sin 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$$

이므로 전체 넓이는 항상  $3\sqrt{3}$ 이다. 따라서, 최소값도 최대값도  $3\sqrt{3}$ 이고 최소값과 최대값의 곱은 27 ... **답** ◇

**KMO 2006-R1-H18**

수열  $\{a_n\}$ 은  $a_1 = 1$  이고 모든 양의 정수  $n$ 에 대하여,  $a_{n+1} = 3^{a_n} + 1$  을 만족한다.  $a_n$ 을 100으로 나눈 나머지를  $b_n$ 이라 할 때  $b_{2006} + b_{2007} + \cdots + b_{2015}$  의 값을 구하여라.

**풀이 (대전과학고 1학년 고기혁)**

3의 거듭제곱을 mod 100으로 차근차근 살펴보면  $3^{10} \equiv 49 \pmod{100}$ ,  $3^{20} \equiv 1 \pmod{100}$  이 된다. (그냥 이것만 확인하자면  $3^{10} = (10-1)^5$  을 이항정리로 전개하여 확인해도 된다.) 즉,

$$3^{20l+r} \equiv 3^r \pmod{100}$$

이제  $a_n$ 을 차례로 구해보면

$$a_1 = 1$$

$$a_2 = 3^1 + 1 = 4$$

$$a_3 = 3^4 + 1 = 82$$

$$a_4 = 3^{82} + 1 \equiv 3^2 + 1 = 10 \pmod{100}$$

$$a^5 = 3^{100k+10} + 1 \equiv 3^{10} + 1 \equiv 49 + 1 = 50 \pmod{100}$$

만약,  $a_n \equiv 50 \pmod{100}$  이라면,

$$a_{n+1} = 3^{50+100k} + 1 \equiv 3^{10} + 1 \equiv 49 + 1 = 50 \pmod{100}$$

따라서,

$$a_5, a_6, a_7, \dots \equiv 50 \pmod{100}$$

즉,  $b_5, b_6, \dots = 50$  이고  $b_{2006} + b_{2007} + \dots + b_{2015} = 50 \times 10 = 500 \dots$  **답**  $\diamond$

**KMO 2006-R1-H19**

함수  $f: [0, 6] \rightarrow [-4, 4]$  가 다음 두 조건을 만족시킬 때,  $\{f(3) + 2f(1)\}^2$  의 값을 구하여라.

(1)  $f(0) = 0, f(6) = 4.$

(2)  $x \geq 0, 0 \leq y, x + y \leq 6$  이면

$$f(x+y) = \frac{1}{4} \{f(x)\sqrt{16-f(y)^2} + f(y)\sqrt{16-f(x)^2}\}.$$

**풀이 (대전과학고 1학년 고기혁)**

$x = y = 3$  을 대입하면

$$f(6) = \frac{1}{4} [2f(3)\sqrt{16-f(3)^2}]$$

$$8 = f(3)\sqrt{16-f(3)^2} \Rightarrow f(3) > 0$$

$$64 = f(3)^2(16-f(3)^2) = -f(3)^4 + 16f(3)^2$$

즉,  $f(3)^4 - 16f(3)^2 + 64 = 0$  을 풀면  $f(3)^2 = 8$ .  $f(3) > 0$  이므로

$$f(3) = 2\sqrt{2}$$

$x = 1, y = 2$  를 대입하면

$$f(3) = \frac{1}{4}[f(1)\sqrt{16-f(2)^2} + f(2)\sqrt{16-f(1)^2}]$$

$x = y = 1$  을 대입하면

$$\begin{aligned} f(2) &= \frac{1}{4}[2f(1)\sqrt{16-f(1)^2}] \\ 16-f(2)^2 &= 16 - \frac{1}{4}f(1)^2(16-f(1)^2) \\ &= \frac{64-16f(1)^2+f(1)^4}{4} = \left(\frac{f(1)^2-8}{2}\right)^2 \end{aligned}$$

이것을 앞의 식에 대입하면

$$\begin{aligned} f(3) &= \frac{1}{4}\left[f(1)\left|\frac{f(1)^2-8}{2}\right| + \frac{1}{2}f(1)(16-f(1)^2)\right] \\ &= \frac{f(1)}{8}(|f(1)^2-8| + 16-f(1)^2) \end{aligned}$$

만일  $f(1)^2 \geq 8$  이라면

$$f(3) = f(1) = 2\sqrt{2} \rightarrow f(2) = 4$$

그런데  $f(4) = f(2+2) = 0$  과  $f(4) = f(3+1) = 4$  가 서로 결과가 맞지 않으므로 모순! 따라서,  $f(1)^2 < 8$  이어야 하고,

$$\begin{aligned} f(3) &= \frac{1}{8}f(1)(24-2f(1)^2) \\ 8\sqrt{2} &= -f(1)^3 + 12f(1) \\ 0 &= x^3 - 12x + 8\sqrt{2} \quad (x = f(1)) \\ &= (x-2\sqrt{2})(x^2+2\sqrt{2}x-4) \\ &= (x-2\sqrt{2})(x-(\sqrt{3}-1)\sqrt{2})(x+(\sqrt{3}+1)\sqrt{2}) \end{aligned}$$

여기서 근으로 나오는 값 중  $x^2 < 8$  을 만족시키는 것은

$$x = (\sqrt{3}-1)\sqrt{2} (= f(1))$$

뿐이다. 그럼  $[f(3) + 2f(1)]^2 = [2\sqrt{2} + 2\sqrt{6} - 2\sqrt{2}]^2 = (2\sqrt{6})^2 = 24 \dots$  **답**

◇



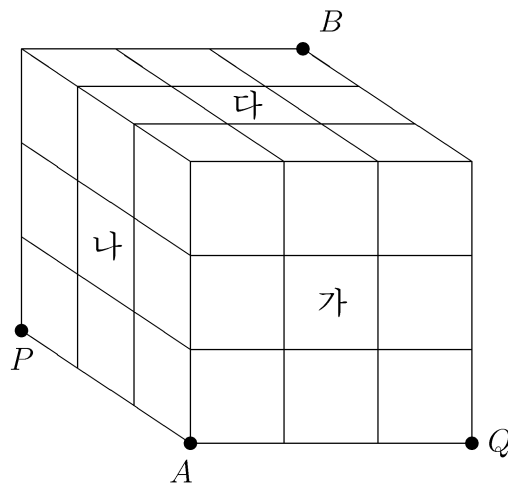
⑦ 점화식 (2)는  $\sin$  함수의 합각공식과 닮았다는 것을 눈치챌 수 있다. 실제로

$$f(x) = 4 \sin \frac{\pi}{12} x$$

로 두면 초기조건 (1)과 점화식 (2)를 모두 만족시킨다. 원래는 단답식 문제이므로 그냥 이런 함수에 대입하여 값을 찾아도 그만일 것이다. 그러나, 제대로 문제를 풀자면 이 값이 유일한지 알 수 없기 때문에 이것으로는 부족하다. 예를 들어,  $f(x) = 4 \sin \frac{5\pi}{12} x$  로 해도 문제의 조건을 만족하는 함수가 된다. 이런 여러 함수가 존재하더라도 문제의 점화식에 의해  $f(3) + 2f(1)$ 의 값이 유일하게 결정된다는 것만 말하면 이런 함수 중 하나에 대입하여 문제를 풀 수는 있을 것이다.

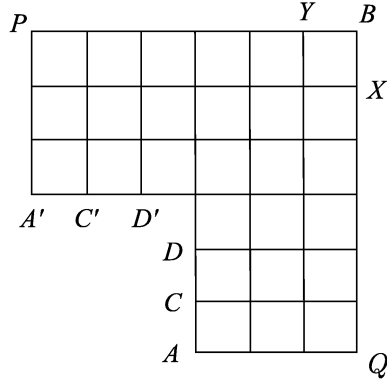
#### KMO 2006-R1-H20

한 변의 길이가 3인 정육면체의 면에 그림과 같이 격자가 그려져 있다. ‘가’는 앞면, ‘나’는 옆면, ‘다’는 윗면이다. 점  $A$ 에 있는 개미가 점  $B$ 에 있는 먹이를 가지고 점  $A$ 로 돌아오는 데 개미는 그림의 선분들만을 따라 최단 경로로 움직이되, 한 번 지나간 점을 다시 지나가지 않으며, 갈 때는 ‘나’면의 내부와 점  $P$ 를 지나지 않고 올 때는 ‘가’면의 내부와 점  $Q$ 를 지나지 않는다. 개미가 선택할 수 있는 서로 다른 경로의 수를  $x$ 라 할 때,  $x$ 를 100으로 나눈 나머지를 구하여라.



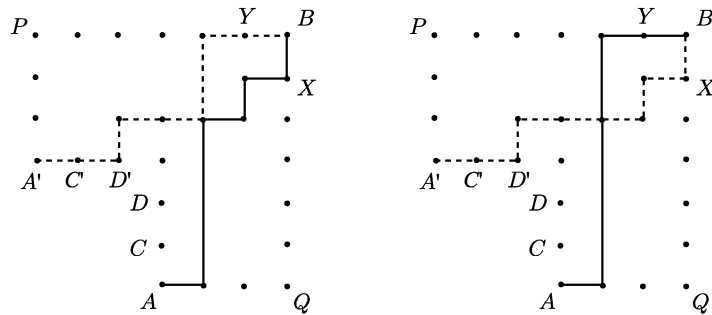
**풀이** (서울대 수학교육과 대학원 신종현)

그림과 같이 펼쳐서 생각하자.



그러면, 개미는  $A$ 에서 출발하여  $B$ 를 거친 후에  $A'$ 으로 온다.  $A$ 에서  $B$ 로 가는 최단경로와  $B$ 에서  $A'$ 으로 가는 최단경로가 겹치지 않기 위해서는 일단,  $A-X-B-Y-A'$  순으로 가야 함은 자명하다.  $A$ 에서  $X$ 로 가는 최단경로의 가지수는  $\binom{8}{3} = 56$ ,  $Y$ 에서  $A'$ 으로 가는 최단경로의 수도  $\binom{8}{3} = 56$  이다. 따라서,  $A-X-B-Y-A'$  순서의 최단경로는  $56^2$ 가지가 있다.

이중에서  $A-X$ 와  $Y-A'$  경로가 중간에서 만날 경우에는, 두 경로가 만나는 점에서  $B$ 와 제일 가까운 점을  $M$ 이라 할 때에  $M-X-B-Y-M$  순서의 최단경로를 뒤집어서  $M-Y-B-X-M$  최단경로로 바꾸어주면,  $A-Y-B-X-A'$  순서의 최단경로를 얻는다. 또한, 이 대응은  $A-X-B-Y-A'$  순의 최단경로 중에서도중에 지나간 점을 또 지나는 경우가 있는 것과,  $A-Y-B-X-A'$  순의 최단경로 사이의 일대일 대응이다. 따라서, 중간에 겹치는 최단경로는  $\binom{8}{2}^2 = 28^2$ 개가 있고,  $A-X-B-Y-A'$  순의 최단경로 중에서 도중에 지났던 곳을 다시 지나지 않는 것은  $56^2 - 28^2$  가지가 있다.



한편, 원래의 그림에서는  $C = C'$ ,  $D = D'$  인데, 그것을 고려하면, 이중에서  $D, D'$ 을 동시에 지나거나,  $C, C'$ 을 동시에 지나는 것을 빼내야 한다.  $D, D'$ 을 동시에 지나는 것

은  $C, C'$ 을 동시에 지나는 것에 포함되므로  $C, C'$ 을 동시에 지나는 것을 세어주면 된다. 위와 같은 방법으로 하여,  $C-X-B-Y-C'$ 의 최단경로에서  $C-Y-B-X-C'$ 의 최단경로를 빼주면 되므로  $\binom{7}{3}^2 - \binom{7}{2}^2 = 35^2 - 21^2$  가지가 있다.

따라서, 경로의 개수는  $(56^2 - 28^2) - (35^2 - 21^2) = 1568$ 가지이고, 답은 568.  $\diamond$